

А.Х. Шахмейстер

КОРНИ



Практикум
Тренинг
Контроль

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Рекомендовано

Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников,
абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.

Ш 32 Корни. — 4-е изд. — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» :
М.: Издательство МЦНМО, 2011. — 184 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-019-4,
ISBN 978-5-91281-043-5, ISBN 978-5-94057-794-2

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного
курса математики, содержит большое количество разноуровневого тре-
нировочного материала. В книге представлена программа для проведе-
ния элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, сту-
дентов, преподавателей.

© Шахмейстер А. Х., 2011
© Куликов Ю. Н., обложка, 2011
© ООО «Петроглиф», 2011

ISBN 978-5-94057-794-2 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-019-4 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-043-5 (ООО «Виктория плюс»)

Учебное издание

**Шахмейстер Александр Хаймович
КОРНИ**

Научный редактор серии А. В. Семенов
Художник Ю. Н. Куликов
Компьютерная Верстка С. С. Афонин
Корректоры Е. Г. Никитина, И. Б. Смирнов, А. Б. Смирнов

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»

В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 943-8076; факс: (812) 560-0598.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

*Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса для учащихся 8-10 классов
(20 – 25 уроков).**

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 6 (+1)	<p>Квадратные корни (стр. 5 – 41) Практикум 1, 2 (примеры по выбору учителя, с учётом возможностей учащихся). Тренировочная работа 1 (1, 3, 7, 9). Практикум 3. Тренировочная работа 2 (3, 5, 8, 10). Тренировочная работа 3 (2, 3, 5). Практикум 5. Практикум 6. Проверочная работа 2 (1, 7, 8, 10).</p>
7 – 12 (+2)	<p>Степени с натуральными показателями (стр. 42 – 44) Практикум 7. Степени с дробными показателями (стр. 45 – 72) Практикум 8. Упражнения: 1 (2, 5, 7, 10); 2 (2, 3, 8); 3 (3, 8, 10); 4 (5, 8). Тренировочная работа 5: раздел 1 (четные); раздел 2 (нечетные); раздел 3 (1, 4); раздел 4 (4, 5, 6). Проверочная работа 4 (3, 4, 6, 10, 12, 14, 19, 24, 28, 30). Практикум 9. Тренировочная работа 6 (2, 3, 7, 10, 12). Практикум 10.</p>
13 – 20 (+2)	<p>Решение более сложных примеров (стр. 73 – 89) Практикум 11. Тренировочная работа 7 (1, 4, 7, 11, 12, 14). Подготовительные карточки (стр. 90 – 113) Карточка 1 (1, 2, 4). Карточка 2 (2, 4). Карточка 3 (3, 4). Карточка 4 (2, 3). Карточка 5 (4). Карточка 6 (2). Карточка 8 (2, 4). Карточка 11 (1, 3). Тренировочные карточки (стр. 114 – 140) Карточка 1 (3). Карточка 2 (2, 3). Карточка 5 (3). Карточка 6 (1, 3).</p>

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

Выведение

Напомним определение корня n -й степени из числа a . Корнем n -й степени из числа a называется такое число b , n -я степень которого равна a . То есть $\sqrt[n]{a} = b$ при $b^n = a$. Если $n = 2k - 1$, то есть нечетная степень, то никаких проблем нет. А вот если $n = 2k$, то есть четная степень, то возникают проблемы.

Пример:

$$\sqrt{25} = 5, \text{ так как } 5^2 = 25; \quad \sqrt{25} = -5, \text{ так как } (-5)^2 = 25.$$

Ну и что в этом плохого? На первый взгляд все нормально, но как в таком случае складывать и вычитать корни?

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = \begin{cases} 2 + 3 = 5, \\ 2 - 3 = -1, \\ -2 + 3 = 1, \\ -2 - 3 = -5. \end{cases}$$

Никакой однозначности. Ну, и какой случай выбрать? Вот, чтобы такой неразберихи не было, вводится понятие арифметического корня четной степени из числа a , как неотрицательного числа b , четная степень которого равна a . То есть

$$\sqrt[2k]{a} = b, \text{ если } \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2k} = a. \end{cases}$$

Тогда $\sqrt{9} = 3$ (и только), $\sqrt[4]{16} = 2$ и т.д.

Пример 1. При каких a справедливо $\sqrt{a^3} = -a$?

$$\text{По определению } \begin{cases} -a \geq 0, \\ a^3 = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leq 0, \\ a^3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leq 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$$

то есть при $a = 0$.

Пример 2. $\sqrt{a^2} = a \iff \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 = a^2. \end{cases}$ Следовательно $a \in [0; +\infty)$.

1

Квадратные корни

Некоторые свойства квадратных корней

$$1) \sqrt{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, & a \geq 0; b \geq 0, \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}, & a < 0; b < 0. \end{cases}$$

$$2) \sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, & a \geq 0; b > 0, \\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}, & a < 0; b < 0. \end{cases}$$

$$3) b\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{a \cdot b^2} & a \geq 0; b \geq 0, \\ -\sqrt{a \cdot b^2} & a \geq 0; b < 0. \end{cases}$$

$$4) \sqrt{a} = \begin{cases} (\sqrt{a})^2, & a \geq 0, \\ (\sqrt{-a})^2, & a < 0. \end{cases}$$

$$5) \sqrt{-a} = \begin{cases} a, & a \leq 0, \\ -a, & a > 0. \end{cases}$$

Обратите внимание на действия с квадратными корнями

Практикум 1

Вычислите:

$$1. 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12.$$

$$2. 3\sqrt{0,81} = 3 \cdot 0,9 = 2,7.$$

$$3. 4\sqrt{0,3^2} = 4 \cdot 0,3 = 1,2.$$

$$4. \sqrt{400} - \sqrt{256} = 20 - 16 = 4.$$

$$5. 2\sqrt{100} - \sqrt{196} = 2 \cdot 10 - 14 = 6.$$

$$6. \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} - \sqrt{0,6^2} = \frac{3}{2} - 0,6 = 0,9.$$

$$7. \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{324}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

$$8. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{9} = \frac{1}{2} - 3 = -2,5.$$

$$9. \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6.$$

$$10. \sqrt{0,75} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{0,25 \cdot 3 \cdot 3} = 0,5 \cdot 3 = 1,5.$$

Упражнения

Вычислите:

	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
1	$3\sqrt{25}$	$2\sqrt{0,49}$	$5\sqrt{2,56}$	$2,4\sqrt{0,25}$
2	$4\sqrt{0,36}$	$3\sqrt{64}$	$4\sqrt{961}$	$5\sqrt{5,29}$
3	$5\sqrt{0,5^2}$	$6\sqrt{0,3^2}$	$5\sqrt{0,7^2}$	$4\sqrt{0,0196}$
4	$\sqrt{121} - \sqrt{144}$	$\sqrt{169} - \sqrt{225}$	$\sqrt{4,84} - \sqrt{5,29}$	$\sqrt{3,61} + \sqrt{4,41}$
5	$2\sqrt{484} - 3\sqrt{169}$	$2\sqrt{576} - 4\sqrt{121}$	$3\sqrt{676} - 2\sqrt{841}$	$2\sqrt{1024} - \sqrt{2601}$
6	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} + \sqrt{0,75^2}$	$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} + \sqrt{0,36}$	$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} - \sqrt{0,49}$	$\frac{\sqrt{3,43}}{\sqrt{0,07}} - \frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$
7	$\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{256}}$	$\frac{\sqrt{676}}{\sqrt{169}}$	$\frac{\sqrt{729}}{\sqrt{324}}$	$\frac{\sqrt{784}}{\sqrt{1296}}$
8	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} - \frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{841}}{\sqrt{256}}$	$\frac{\sqrt{0,96}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{1,96}}{\sqrt{2,25}}$	$\frac{\sqrt{0,72}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2,89}}{\sqrt{2,56}}$
9	$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{20} \cdot \sqrt{1,8}$	$\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{1,2}$	$\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{1,8}$
10	$\sqrt{0,24} \cdot \sqrt{6}$	$\sqrt{60} \cdot \sqrt{2,4}$	$\sqrt{0,125} \cdot \sqrt{0,98}$	$\sqrt{2,88} \cdot \sqrt{1,62}$

Ответы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ 1	15	2,4	2,5	-1	5	2,5	1,5	-6,8	6	1,2
№ 2	1,4	24	1,8	-2	4	4,6	2	$-\frac{5}{16}$	6	12
№ 3	8	124	3,5	-0,1	20	3,3	1,5	$-\frac{8}{15}$	1,8	0,35
№ 4	1,2	11,5	0,56	4	13	4	$\frac{7}{9}$	$-\frac{37}{80}$	4,8	2,16

Практикум 2

Вычислите наиболее рациональным способом:

$$1. \sqrt{1,845^2 - 0,405^2} = \sqrt{(1,845 + 0,405)(1,845 - 0,405)} = \\ = \sqrt{2,25 \cdot 1,44} = 1,5 \cdot 1,2 = 1,8.$$

$$2. \sqrt{0,16 \cdot 6,41 \cdot 1,25 - 0,16 \cdot 1,25^2 - 0,16^2 \cdot 1,25} = \\ = \sqrt{0,16 \cdot 1,25(6,41 - 1,25 - 0,16)} = \\ = \sqrt{0,4^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot 5} = \frac{0,4 \cdot 5}{2} = 1.$$

$$3. \sqrt{\frac{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 23 + 23^2}{26^2 - 24^2}} = \sqrt{\frac{(73 - 23)^2}{(26 + 24)(26 - 24)}} = \\ = \sqrt{\frac{50^2}{50 \cdot 2}} = \sqrt{25} = 5.$$

$$4. \sqrt{\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152,5^2 - 27,5^2)}.$$

Так как $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, где $a = 97$, $b = 53$,

$$\sqrt{\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152,5^2 - 27,5^2)} = \\ = \sqrt{\frac{\left(\frac{97-53}{44}\right) (97^2 + 97 \cdot 53 + 53^2) + 97 \cdot 53}{(152,5 + 27,5)(152,5 - 27,5)}} = \\ = \sqrt{\frac{97^2 + 97 \cdot 53 + 53^2 + 97 \cdot 53}{180 \cdot 125}} = \sqrt{\frac{(97 + 53)^2}{5 \cdot 36 \cdot 5^3}} = \frac{150}{5^2 \cdot 6} = 1.$$

$$5. 2\sqrt{245} + \frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} - 30\sqrt{1,8} = \\ = 2\sqrt{5 \cdot 49} + \frac{1}{6}\sqrt{(58 + 22)(58 - 22)} - 3\sqrt{100 \cdot 1,8} = \\ = 2 \cdot 7\sqrt{5} + \frac{1}{6}\sqrt{80 \cdot 36} - 3\sqrt{180} = 14\sqrt{5} + \frac{6}{6}\sqrt{5 \cdot 16} - 3\sqrt{5 \cdot 36} = \\ = 14\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = 0.$$

$$6. \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^3 (\sqrt{7} + \sqrt{6})^3}{0,125} = \frac{((\sqrt{7} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{6}))^3}{\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{(7 - 6)^3}{\frac{1}{8}} = 8.$$

$$7. \sqrt{\frac{13,75 \cdot 1,2}{(\sqrt{69} - \sqrt{3})(\sqrt{69} + \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{13\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}}{69 - 3}} = \sqrt{\frac{55 \cdot \frac{6}{5}}{66}} =$$

$$= \sqrt{\frac{11}{4} \cdot \frac{6}{6 \cdot 11}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$8. \left(\frac{\sqrt{12} - \sqrt{27}}{\sqrt{18} - \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{12 - 2\sqrt{12} \cdot \sqrt{27} + 27}{18 - 2\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + 2} =$$

$$= \frac{39 - 2\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 3^3}}{20 - 2\sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{39 - 2 \cdot 2 \cdot 9}{20 - 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{8}.$$

$$9. \frac{(4 + \sqrt{40})(\sqrt{4,5} + \sqrt{1,125})}{\sqrt{18} + \sqrt{45}} = \frac{(4 + 2\sqrt{10})\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{9}{8}}\right)}{3\sqrt{2} + 3\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{3(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

$$10. \frac{(\sqrt{14} + 1)(\sqrt{98} - \sqrt{7} + 2\sqrt{14} - 2)}{\sqrt{28} + 4} =$$

$$\frac{(\sqrt{14} + 1)(7\sqrt{2} - \sqrt{7} + 2\sqrt{14} - 2)}{2\sqrt{7} + 4} =$$

$$\frac{(\sqrt{14} + 1)((7\sqrt{2} + 2\sqrt{14}) - (\sqrt{7} + 2))}{2(\sqrt{7} + 2)} =$$

$$\frac{(\sqrt{14} + 1)(\sqrt{14}(\sqrt{7} + 2) - (\sqrt{7} + 2))}{2(\sqrt{7} + 2)} =$$

$$\frac{(\sqrt{14} + 1)(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{14} - 1)}{2(\sqrt{7} + 2)} =$$

$$\frac{(\sqrt{14} + 1)(\sqrt{14} - 1)}{2} = \frac{14 - 1}{2} = 6,5.$$

Тренировочная работа 1

Вычислите:

1.
$$\sqrt{\frac{9}{32} - \frac{1}{35}\sqrt{392}} + \frac{1}{2400}\sqrt{97^2 - 47^2}.$$

2.
$$\sqrt{(36,5^2 - 27,5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33\right)}.$$

3.
$$\sqrt{74,5^3 - 74,5^2 \cdot 69,5 - 74,5 \cdot 69,5^2 + 69,5^3}.$$

4.
$$\sqrt{2 + \sqrt{\frac{68(32^2 - 15^2)}{47}}}.$$

5.
$$\sqrt{\sqrt{63} - 7\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}}.$$

6.
$$\frac{(7\sqrt{27} - 7\sqrt{8})(\sqrt{27} + \sqrt{8})}{27^2 - 64}.$$

7.
$$\sqrt{\frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}} + \sqrt{10} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

8.
$$\sqrt{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{18} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{12} + \sqrt{28}}}.$$

9.
$$\frac{(4\sqrt{7} + \sqrt{32})^2}{18 + 2\sqrt{56}}.$$

10.
$$\frac{(\sqrt{17} - 2)(\sqrt{34} + \sqrt{8} + \sqrt{17} + 2)}{\sqrt{2} + 1}.$$

Решение тренировочной работы 1

Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sqrt{\frac{9}{32}} - \frac{1}{35}\sqrt{392} + \frac{1}{2400}\sqrt{97^2 - 47^2} = \\
 & = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{35}\sqrt{2 \cdot 196} + \frac{1}{2400}\sqrt{(97+47)(97-47)} = \\
 & = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{14}{35}\sqrt{2} + \frac{1}{2400}\sqrt{50 \cdot 144} = \\
 & = \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{14}{35}\sqrt{2} + \frac{12 \cdot 5\sqrt{2}}{2400} = \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{1}{40}\sqrt{2} = \\
 & = \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{5} + \frac{1}{40}\right)\sqrt{2} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \sqrt{(36,5^2 - 27,5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33\right)} = \\
 & = \sqrt{(36,5 - 27,5)(36,5 + 27,5)} \div \\
 & \quad \div \sqrt{\frac{(57 + 33)(57^2 - 57 \cdot 33 + 33^2)}{90} - 57 \cdot 33} = \\
 & = \sqrt{9 \cdot 64 : (57^2 - 57 \cdot 33 + 33^2 - 57 \cdot 33)} = \\
 & = 3 \cdot 8 \sqrt{\frac{1}{(57 - 33)^2}} = \frac{3 \cdot 8}{24} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \sqrt{74,5^3 - 74,5^2 \cdot 69,5 - 74,5 \cdot 69,5^2 + 69,5^3} = \\
 & = \sqrt{74,5^2(74,5 - 69,5) - 69,5^2(74,5 - 69,5)} = \\
 & = \sqrt{(74,5^2 - 69,5^2)(74,5 - 69,5)} = (74,5 - 69,5)\sqrt{74,5 + 69,5} = \\
 & = 5\sqrt{144} = 5 \cdot 12 = 60.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \sqrt{2 + \sqrt{\frac{68(32^2 - 15^2)}{47}}} = \sqrt{2 + \sqrt{\frac{68(32 - 15)(32 + 15)}{47}}} = \\
 & = \sqrt{2 + \sqrt{68 \cdot 17}} = \sqrt{2 + 17 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \sqrt{\sqrt{63} - 7\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}} = \\
 & = \sqrt{\sqrt{9 \cdot 7} - 7\sqrt{\frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{7 \cdot 49} + \sqrt{7 \cdot 16}} = \\
 & = \sqrt{3\sqrt{7} - \frac{7}{2}\sqrt{7} - \frac{7}{2}\sqrt{7} + 4\sqrt{7}} = \sqrt{0} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \frac{(7\sqrt{27} - 7\sqrt{8})(\sqrt{27} + \sqrt{8})}{27^2 - 64} = \\
 & = \frac{7(\sqrt{27} - \sqrt{8})(\sqrt{27} + \sqrt{8})}{(27 + 8)(27 - 8)} = \\
 & = \frac{7(27 - 8)}{35(27 - 8)} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \sqrt{\frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}} + \sqrt{10} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \\
 & = \sqrt{\frac{(\sqrt{5})^3 - (\sqrt{2})^3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}} + \sqrt{10} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \\
 & = \sqrt{\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})((\sqrt{5})^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2)}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}} + \sqrt{10} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \\
 & = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + \sqrt{10} + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{10} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \\
 & = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \\
 & = 5 - 2 = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{18} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{12} + \sqrt{28}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(3\sqrt{2} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 7}}} = \\
 & = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(4\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{3} + \sqrt{7})}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2}{2}} = 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \frac{(4\sqrt{7} + \sqrt{32})^2}{18 + 2\sqrt{56}} = \frac{(4\sqrt{7} + 4\sqrt{2})^2}{18 + 2 \cdot 2\sqrt{14}} = \\
 & = \frac{4^2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2}{14 + 2 \cdot 2\sqrt{14} + 4} = \frac{16 (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{14} + 2)^2} = \\
 & = \frac{16 (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2} = 8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{(\sqrt{17} - 2)(\sqrt{34} + \sqrt{8} + \sqrt{17} + 2)}{\sqrt{2} + 1} = \\
 & = \frac{(\sqrt{17} - 2)((\sqrt{34} + \sqrt{8}) + (\sqrt{17} + 2))}{\sqrt{2} + 1} = \\
 & = \frac{(\sqrt{17} - 2)(\sqrt{2}(\sqrt{17} + 2) + (\sqrt{17} + 2))}{\sqrt{2} + 1} = \\
 & = \frac{(\sqrt{17} - 2)(\sqrt{17} + 2)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = \\
 & = (\sqrt{17} - 2)(\sqrt{17} + 2) = 17 - 4 = 13.
 \end{aligned}$$

Попробуйте теперь решить еще раз самостоятельно.

Проверочная работа 1

Вычислите наиболее рациональным способом:

$$1. \sqrt{1,25} + 1,5\sqrt{80} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180}.$$

$$2. \sqrt{51,5^3 + 51,5^2 \cdot 26,5 - 51,5 \cdot 26,5^2 - 26,5^3}.$$

$$3. \sqrt{\left(\frac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41\right) : (133,5^2 - 58,5^2)}.$$

$$4. \sqrt{90 + \sqrt{\frac{31(57^2 - 26^2)}{83}}}.$$

$$5. \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{48} + \frac{1}{66}\sqrt{363}} - \frac{1}{68}\sqrt{158^2 - 131^2}}.$$

$$6. \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(7 - \sqrt{10})(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})}{\frac{36^2 - 28^2}{27^2 + 2 \cdot 27 \cdot 5 + 5^2}}.$$

$$7. \frac{11(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2}{12(3 - 2\sqrt{2})}.$$

$$8. \sqrt{\frac{(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{24} - \sqrt{8}}}.$$

$$9. \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{72}}{3(2\sqrt{6} - \sqrt{16})(\sqrt{16} + 1)}.$$

$$10. \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})(\sqrt{60} - \sqrt{12} - \sqrt{45} + 3)}{2 - \sqrt{3}}.$$

Практикум 3

Теперь рассмотрим примеры других видов.

Упростить и вычислить:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (4\sqrt{7} - \sqrt{119} - 4\sqrt{3} + \sqrt{51})(4\sqrt{7} + \sqrt{119} + 4\sqrt{3} + \sqrt{51}) = \\
 & = (4\sqrt{7} - \sqrt{7 \cdot 17} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}) \times \\
 & \quad \times (4\sqrt{7} + \sqrt{7 \cdot 17} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{17}) = \\
 & = (\sqrt{7}(4 - \sqrt{17}) - \sqrt{3}(4 - \sqrt{17})) \times \\
 & \quad \times (\sqrt{7}(4 + \sqrt{17}) + \sqrt{3}(4 + \sqrt{17})) = \\
 & = (4 - \sqrt{17})(\sqrt{7} - \sqrt{3})(4 + \sqrt{17})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \\
 & = (4 - \sqrt{17})(4 + \sqrt{17})(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \\
 & = (16 - 17)(7 - 3) = -4.
 \end{aligned}$$

$$2. \quad (\sqrt{21} - 2)\sqrt{25 + 2\sqrt{84}}.$$

$$\text{Известно, что } a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & \text{при } a \geq 0; \quad b \geq 0, \\ -\sqrt{a^2b} & \text{при } a < 0; \quad b \geq 0. \end{cases}$$

Учтем, что $\sqrt{21} > 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{21} - 2)\sqrt{25 + 2\sqrt{84}} &= \sqrt{(\sqrt{21} - 2)^2(25 + 2\sqrt{84})} = \\
 &= \sqrt{(21 - 4\sqrt{21} + 4)(25 + 2\sqrt{4 \cdot 21})} = \\
 &= \sqrt{(25 - 4\sqrt{21})(25 + 4\sqrt{21})} = \sqrt{25^2 - (4\sqrt{21})^2} = \\
 &= \sqrt{625 - 16 \cdot 21} = \sqrt{625 - 336} = \sqrt{289} = 17.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \frac{1}{\sqrt{3} + 2} + 2 + \sqrt{3} &= \frac{1 + (2 + \sqrt{3})^2}{\sqrt{3} + 2} = \frac{1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 2} = \\
 &= \frac{4(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3} + 2} = 4.
 \end{aligned}$$

Можно поступить иначе. Выражения $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{3} - 2$ — взаимно сопряженные¹.

¹ Выражения $a + b$ и $a - b$ называются взаимно сопряженными. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Выражения $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ — также взаимно сопряженные, и $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

$(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) = 3 - 4 = -1$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)} = \frac{\sqrt{3} - 2}{3 - 4} = \frac{\sqrt{3} - 2}{-1} = 2 - \sqrt{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + 2} + 2 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4.$$

4. $\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} - (11 - 5\sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$.

В первой дроби домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}; \quad \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} - (11 - 5\sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = \\ & = \frac{(1 - \sqrt{10})(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} - (22 - 10\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - 5 \cdot 5) = \\ & = \frac{\sqrt{5} - 5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{5 - 2} - (-3 + \sqrt{5}) = \frac{3\sqrt{5} - 6\sqrt{2}}{3} + 3 - \sqrt{5} = \\ & = \sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 3 - \sqrt{5} = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

5. $\frac{7}{\sqrt{11} - 2} + \frac{5}{4 + \sqrt{11}}$.

Домножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю данной дроби:

$$\begin{aligned} & \frac{7}{\sqrt{11} - 2} + \frac{5}{4 + \sqrt{11}} = \frac{7(\sqrt{11} + 2)}{(\sqrt{11})^2 - 2^2} + \frac{5(4 - \sqrt{11})}{4^2 - (\sqrt{11})^2} = \\ & = \frac{7(\sqrt{11} + 2)}{11 - 4} + \frac{5(4 - \sqrt{11})}{16 - 11} = \frac{7}{7}(\sqrt{11} + 2) + \frac{5}{5}(4 - \sqrt{11}) = \\ & = \sqrt{11} + 2 + 4 - \sqrt{11} = 6. \end{aligned}$$

6. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Попытаемся представить подкоренное выражение в виде полного квадрата разности или суммы. Напоминаем, что

$\sqrt{a^2} = |a|$, так как $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases}$ а это совпадает с определением арифметического корня четной степени.

$$3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{2} - 1)^2;$$

$$3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{2} + 1)^2,$$

значит,

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}.$$

Поскольку $\sqrt{2} + 1 > 0$ и $\sqrt{2} - 1 > 0$, последнее выражение преобразуется к виду

$$|\sqrt{2} - 1| - |\sqrt{2} + 1| = (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1) =$$

$$= \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1 = -2.$$

7. $\sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}}.$

Попробуем в этом примере также представить подкоренное выражение в виде полного квадрата разности:

$$\sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{6})^2}} =$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{|\sqrt{5} - \sqrt{6}|} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}},$$

поскольку $\sqrt{5} < \sqrt{6}$, получим

$$\sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} =$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{6 - 5} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - (\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 0.$$

8. Расположите числа в порядке возрастания:

$$\frac{2}{3}\sqrt{72}; \quad \sqrt{29}; \quad 7\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Так как $\frac{2}{3}\sqrt{72} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 72} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{32};$

$$7\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 2}{3}} = \sqrt{\frac{98}{3}} = \sqrt{32\frac{2}{3}},$$

то расположение чисел в порядке возрастания будет таким:

$$\sqrt{29}; \quad \frac{2}{3}\sqrt{72}; \quad 7\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

9. Что больше: $(\sqrt{6} - 1)$ или $\sqrt{2}$?

а) Пусть $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{2} \iff \sqrt{6} > \sqrt{2} + 1 \iff 6 > (\sqrt{2} + 1)^2 \iff 6 > 2 + 2\sqrt{2} + 1 \iff 3 > 2\sqrt{2} \iff 9 > 8$ — истинно, значит действительно $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{2}$.

б) Можно и по-другому:

$$a = \sqrt{6} - 1 > 0 \Rightarrow a^2 = 6 - 2\sqrt{6} + 1 = 7 - 2\sqrt{6};$$

$$b = \sqrt{2} > 0; \quad b^2 = 2.$$

Рассмотрим

$$a^2 - b^2 = 7 - 2\sqrt{6} - 2 = 5 - 2\sqrt{6} = \sqrt{25} - \sqrt{24} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 > b^2, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

Значит $a > b$, тогда $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{2}$.

10. Что больше: $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}}$ или $\frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}$?

а) Предположим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} &\geq \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}} \iff \\ &\frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{(\sqrt{13} - \sqrt{10})(\sqrt{13} + \sqrt{10})} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{(\sqrt{14} - \sqrt{11})(\sqrt{14} + \sqrt{11})} \iff \\ \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{13 - 10} &\geq \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{14 - 11} \iff \\ \sqrt{13} + \sqrt{10} &\geq \sqrt{14} + \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Но $\sqrt{13} < \sqrt{14}$, $\sqrt{10} < \sqrt{11}$.

Напомним, что если $\begin{cases} a > b, \\ m > n, \end{cases}$ то $a + m > b + n$,

то есть неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, получится неравенство того же смысла.²

Получаем $\sqrt{13} + \sqrt{10} < \sqrt{14} + \sqrt{11}$.

Мы, полагая, что $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} \geq \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}$,

получили $\sqrt{13} + \sqrt{10} \geq \sqrt{14} + \sqrt{11}$,

значит наше предположение ложное,

тогда $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} < \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}$,

что и требовалось выяснить.

б) Можно иначе:

$$a = \frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{13 - 10} = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{3};$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{14 - 11} = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{3};$$

$$\begin{aligned} b - a &= \frac{\sqrt{14} + \sqrt{11}}{3} - \frac{\sqrt{13} + \sqrt{10}}{3} = \\ &= \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{13}) + (\sqrt{11} - \sqrt{10})}{3} > 0, \end{aligned}$$

так как $\sqrt{14} > \sqrt{13}$, $\sqrt{11} > \sqrt{10}$.

Следовательно, $b > a$, то есть

$$\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{10}} < \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{11}}.$$

² В школьной практике неравенства вида $a > b$ и $k > t$ или $a < b$ и $k < t$ называются неравенствами одинакового знака.

Тренировочная работа 2

Вычислите:

1. $(3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} + \sqrt{21} + 6)(3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - \sqrt{21} - 6)$.

2. $(9 - \sqrt{83})\sqrt{18\sqrt{83} + 164}$.

3. $\frac{4}{\sqrt{5} - 3} + 3 + \sqrt{5}$.

4. $\frac{2\sqrt{7} - 4}{1 + \sqrt{3}} + 6\sqrt{3} + 0,5(\sqrt{21} - 5)(\sqrt{7} + 3\sqrt{3}) - 2$.

5. $\frac{9}{\sqrt{13} - 2} + \frac{3}{4 + \sqrt{13}}$.

6. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{9 + 2\sqrt{14}}}$.

8. Расположите числа в порядке убывания:

$$5\sqrt{\frac{7}{11}}; \quad \sqrt{17}; \quad \frac{1}{2}\sqrt{62}.$$

9. Что меньше: $(\sqrt{7} - 1)$ или $\sqrt{3}$?10. Что больше: $\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}}$ или $\frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}}$?

Решение тренировочной работы 2

Вычислите

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} + \sqrt{21} + 6)(3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - \sqrt{21} - 6) = \\
 & = ((3\sqrt{3} + \sqrt{21}) + 2\sqrt{7} + 6)((3\sqrt{3} - \sqrt{21}) - (6 - 2\sqrt{7})) = \\
 & = (\sqrt{3}(3 + \sqrt{7}) + 2(\sqrt{7} + 3))(\sqrt{3}(3 - \sqrt{7}) - 2(3 - \sqrt{7})) = \\
 & = (3 + \sqrt{7})(\sqrt{3} + 2)(3 - \sqrt{7})(\sqrt{3} - 2) = \\
 & = (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) = \\
 & = (9 - 7)(3 - 4) = -2.
 \end{aligned}$$

2. С учетом того, что $9 < \sqrt{83}$ и

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & b \geq 0; a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2b}, & b \geq 0; a < 0 \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 (9 - \sqrt{83})\sqrt{18\sqrt{83} + 164} &= -\sqrt{(9 - \sqrt{83})^2(18\sqrt{83} + 164)} = \\
 &= -\sqrt{(81 - 18\sqrt{83} + 83)(18\sqrt{83} + 164)} = \\
 &= -\sqrt{(164 - 18\sqrt{83})(18\sqrt{83} + 164)} = -\sqrt{164^2 - 18^2 \cdot 83} = \\
 &= -\sqrt{26896 - 26892} = -\sqrt{4} = -2.
 \end{aligned}$$

Можно проще, если увидеть, что

$$164 + 18\sqrt{83} = 81 + 2 \cdot 9\sqrt{83} + 83 = (9 + \sqrt{83})^2,$$

тогда

$$\begin{aligned}
 (9 - \sqrt{83})\sqrt{(9 + \sqrt{83})^2} &= (9 - \sqrt{83})|9 + \sqrt{83}| = \\
 &= (9 - \sqrt{83})(9 + \sqrt{83}) = 9^2 - 83 = 81 - 83 = -2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \frac{4}{\sqrt{5} - 3} + 3 + \sqrt{5} = \frac{4(\sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3)} + 3 + \sqrt{5} = \\
 & = \frac{4(\sqrt{5} + 3)}{5 - 9} + 3 + \sqrt{5} = -(\sqrt{5} + 3) + 3 + \sqrt{5} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \frac{2\sqrt{7}-4}{1+\sqrt{3}} + 6\sqrt{3} + 0,5(\sqrt{21}-5)(\sqrt{7}+3\sqrt{3}) - 2 = \\
& = \frac{(2\sqrt{7}-4)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + 6\sqrt{3} + \\
& \quad + 0,5(\sqrt{21} \cdot \sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{21} - 15\sqrt{3}) - 2 = \\
& = \frac{2(\sqrt{7}-2)(\sqrt{3}-1)}{3-1} + 6\sqrt{3} + \\
& \quad + 0,5(7\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 9\sqrt{7} - 15\sqrt{3}) - 2 = \\
& = \sqrt{21} - 2\sqrt{3} - \sqrt{7} + 2 + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 2 = \sqrt{21} + \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & \frac{9}{\sqrt{13}-2} + \frac{3}{4+\sqrt{13}} = \\
& = \frac{9(\sqrt{13}+2)}{(\sqrt{13}-2)(\sqrt{13}+2)} + \frac{3(4-\sqrt{13})}{(4+\sqrt{13})(4-\sqrt{13})} = \\
& = \frac{9(\sqrt{13}+2)}{13-4} + \frac{3(4-\sqrt{13})}{16-13} = \frac{9(\sqrt{13}+2)}{9} + \frac{3(4-\sqrt{13})}{3} = \\
& = \sqrt{13} + 2 + 4 - \sqrt{13} = 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \\
& = \sqrt{3+2\sqrt{3} \cdot 1+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot 1+1} = \\
& = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}+1| + |\sqrt{3}-1| = \\
& = \sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3} \quad (\sqrt{3} > 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}} = \\
& = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{7+2\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}+2}} = \\
& = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}} = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{|\sqrt{7}+\sqrt{2}|} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} = \\
 &= \sqrt{7} - \sqrt{2} - \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{7 - 2} = \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{7} - \sqrt{2}) = 0.
 \end{aligned}$$

8. Расположите числа в порядке убывания:

$$5\sqrt{\frac{7}{11}}, \quad \sqrt{17}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{62}.$$

$$5\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 7}{11}} = \sqrt{\frac{175}{11}} = \sqrt{15\frac{10}{11}};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{62} = \sqrt{\frac{62}{4}} = \sqrt{15\frac{1}{2}}.$$

Итак, теперь ясно, как расположить числа в порядке убывания:

$$\sqrt{17}, \quad 5\sqrt{\frac{7}{11}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{62}.$$

9. Что меньше: $(\sqrt{7} - 1)$ или $\sqrt{3}$?

$$\begin{aligned}
 &\text{Допустим, что } \sqrt{7} - 1 < \sqrt{3} \iff \sqrt{7} < \sqrt{3} + 1 \iff \\
 &7 < (\sqrt{3} + 1)^2 \iff 7 < 3 + 2\sqrt{3} + 1 \iff 3 < 2\sqrt{3} \iff \\
 &9 < 12 \text{ — это истинное утверждение.}
 \end{aligned}$$

Значит, поскольку все преобразования были равносильны, наше предположение верно, то есть $\sqrt{7} - 1 < \sqrt{3}$, что и требовалось выяснить.

10. Что больше: $\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}}$ или $\frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}}$?

Допустим, что $\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} \geq \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}}$. Используя известное свойство неравенств:

$$\begin{cases} a > b, \\ a > 0, \\ b > 0, \end{cases} \iff \frac{1}{a} < \frac{1}{b},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{13} + \sqrt{11} \leq \sqrt{14} + \sqrt{10} &\Leftrightarrow (\sqrt{13} + \sqrt{11})^2 \leq (\sqrt{14} + \sqrt{10})^2 \Leftrightarrow \\ 13 + 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{11} + 11 &\leq 14 + 2\sqrt{14} \cdot \sqrt{10} + 10 \Leftrightarrow \\ 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{11} &\leq 2\sqrt{14} \cdot \sqrt{10} \Leftrightarrow 13 \cdot 11 \leq 14 \cdot 10 \Leftrightarrow \\ 143 &\leq 140 \text{ -- увы, это ложь.} \end{aligned}$$

Значит, наше предположение о том, что

$$\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} \geq \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}} \text{ -- ложное.}$$

Так как возможны только три случая $a < b$, $a = b$ или $a > b$, то остается только

$$\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} < \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}}, \text{ что и требовалось выяснить.}$$

Прийти к доказательству наших предположений можно иначе. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} &= \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{(\sqrt{13} + \sqrt{11})(\sqrt{13} - \sqrt{11})} = \\ &= \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{13 - 11} = \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}} &= \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{(\sqrt{14} + \sqrt{10})(\sqrt{14} - \sqrt{10})} = \\ &= \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{14 - 10} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{4}. \end{aligned}$$

Тогда пусть

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}} \geq \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{10}} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2} \geq \frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow \\ 2\sqrt{13} - 2\sqrt{11} &\geq \sqrt{14} - \sqrt{10} \Leftrightarrow 2\sqrt{13} + \sqrt{10} \geq \sqrt{14} + 2\sqrt{11} \Leftrightarrow \\ (2\sqrt{13} + \sqrt{10})^2 &\geq (\sqrt{14} + 2\sqrt{11})^2 \Leftrightarrow \\ 4 \cdot 13 + 4\sqrt{13} \cdot \sqrt{10} + 10 &\geq 14 + 4\sqrt{14} \cdot \sqrt{11} + 4 \cdot 11 \Leftrightarrow \\ 1 + \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} &\geq \sqrt{14} \cdot \sqrt{11} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{10} + 13 \cdot 10 \geq 14 \cdot 11 \Leftrightarrow \\ 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{10} &\geq 23 \Leftrightarrow 4 \cdot 130 \geq 23^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$520 \geq 529$ -- это ложно и т.д. Ясно, что этот способ технически сложнее, но вполне возможен.

Практикум 4

Рассмотрим преобразования корней, включающих алгебраические выражения.

Сократите дроби (1–5):

$$1. \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

$$2. \frac{a-b}{\sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{a-b}} = \sqrt{a-b}.$$

$$3. \frac{a\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}+2} = \frac{(\sqrt{a})^3+2^3}{\sqrt{a}+2}.$$

Поскольку

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

последнее выражение преобразуется к виду

$$\frac{(\sqrt{a}+2)(a-\sqrt{a}\cdot 2+2^2)}{\sqrt{a}+2} = a-2\sqrt{a}+4.$$

$$4. \frac{\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}}{a+\sqrt{ab}+b} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(a+\sqrt{ab}+b)}{a+\sqrt{ab}+b} = \sqrt{b}-\sqrt{a},$$

так как $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$5. \frac{a-3\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}.$$

Положим $\sqrt{a}=t$. Тогда

$$\begin{aligned} a-3\sqrt{a}+2 &= t^2-3t+2 = (t^2-2t)-t+2 = \\ &= t(t-2)-(t-2) = (t-2)(t-1) = (\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1), \end{aligned}$$

$$\text{то есть } \frac{a-3\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}-2.$$

Если учесть, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни, тогда $t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$, что значительно проще разложения числителя на множители.

Вычислите (6–10):

$$\begin{aligned}
 6. \quad \frac{\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}} &= \frac{\sqrt{\sqrt{2}(4 + 2\sqrt{3})}}{\sqrt{\sqrt{2}(4 - 2\sqrt{3})}} = \\
 &= \frac{\sqrt{\sqrt{2}(3 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1)}}{\sqrt{\sqrt{2}(3 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1)}} = \\
 &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)^2}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)^2}} = \frac{|\sqrt{3} + 1|}{|\sqrt{3} - 1|} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \\
 &= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = 2 + \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad &\left(\frac{16}{\sqrt{5} - 1} - \frac{5}{\sqrt{3} + 2} - \frac{8}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \right) (\sqrt{3} + 6) = \\
 &= \left(\frac{16(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{5(2 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 2)(2 - \sqrt{3})} - \frac{8(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \right) (\sqrt{3} + 6) = \\
 &= \left(\frac{16(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} - \frac{5(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} - \frac{8(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} \right) (\sqrt{3} + 6) = \\
 &= (4(\sqrt{5} + 1) - 5(2 - \sqrt{3}) - 4(\sqrt{5} + \sqrt{3})) (\sqrt{3} + 6) = \\
 &= (4\sqrt{5} + 4 - 10 + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{5} - 4\sqrt{3}) (\sqrt{3} + 6) = \\
 &= (\sqrt{3} - 6)(\sqrt{3} + 6) = (\sqrt{3})^2 - 6^2 = 3 - 36 = -33.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad &(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \\
 &= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{(4 + \sqrt{15})^2(4 - \sqrt{15})} = \\
 &= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{(4 + \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} = \\
 &= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{(4 + \sqrt{15})(16 - 15)} = \\
 &= (\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 + \sqrt{15}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{6})^2(4 + \sqrt{15})} = \\
&= \sqrt{(10 - 2\sqrt{10}\sqrt{6} + 6)(4 + \sqrt{15})} = \\
&= \sqrt{(16 - 4\sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 2\sqrt{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = \\
&= 2\sqrt{16 - 15} = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad \frac{8 + 5\sqrt{5}}{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} &= \frac{2^3 + (\sqrt{5})^3}{\sqrt{5 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4}} = \frac{(2 + \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5} + 5)}{\sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2}} = \\
&= \frac{(2 + \sqrt{5})(9 - 2\sqrt{5})}{|\sqrt{5} + 2|} = \frac{(2 + \sqrt{5})(9 - 2\sqrt{5})}{\sqrt{5} + 2} = 9 - 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

$$10. \quad \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}.$$

$$9 - 4\sqrt{5} = 5 - 2 \cdot 2\sqrt{5} + 4 = (\sqrt{5} - 2)^2;$$

$$14 - 6\sqrt{5} = 5 - 2 \cdot 3\sqrt{5} + 9 = (\sqrt{5} - 3)^2.$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} =$$

$$= |\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 3| = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} + 3 = 1,$$

так как $2 < \sqrt{5} < 3$.

Тренировочная работа 3

Сократите дробь:

1. $\frac{a-4}{\sqrt{a}+2}$.

2. $\frac{b-9}{\sqrt{b}-3}$.

3. $\frac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3}$.

4. $\frac{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}{x+\sqrt{xy}+y}$.

5. $\frac{x+5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3}$.

Вычислите:

1. $\frac{\sqrt{9\sqrt{2}+4\sqrt{7}}}{2+\sqrt{14}}$.

2. $\left(\frac{12}{\sqrt{15}-3}-\frac{28}{\sqrt{15}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(6-\sqrt{3})$.

3. $\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+3)$.

4. $\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

5. $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Решение тренировочной работы 3

Сократите дробь:

$$1. \frac{a-4}{\sqrt{a}+2} = \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}+2} = \sqrt{a}-2.$$

$$2. \frac{b-9}{\sqrt{b}-3} = \frac{(\sqrt{b}-3)(\sqrt{b}+3)}{\sqrt{b}-3} = \sqrt{b}+3.$$

$$3. \frac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x})^3+3^3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}+3} = \\ = x-3\sqrt{x}+9.$$

$$4. \frac{\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}}{x+\sqrt{xy}+y} = \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(x+\sqrt{xy}+y)}{x+\sqrt{xy}+y} = \sqrt{y}-\sqrt{x}.$$

$$5. \frac{x+5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3} = \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3} = \\ = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)+2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+2.$$

Вычислите:

$$1. \frac{\sqrt{9\sqrt{2}+4\sqrt{7}}}{2+\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}(9+2\sqrt{14})}}{2+\sqrt{14}} = \\ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}(7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2)}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \\ = \frac{|\sqrt{7}+\sqrt{2}|\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}.$$

$$2. \left(\frac{12}{\sqrt{15}-3} - \frac{28}{\sqrt{15}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} \right) (6-\sqrt{3}) = \\ \left(\frac{12(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)} - \frac{28(\sqrt{15}+1)}{(\sqrt{15}-1)(\sqrt{15}+1)} + \right. \\ \left. \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right) (6-\sqrt{3}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{12(\sqrt{15}+3)}{15-9} - \frac{28(\sqrt{15}+1)}{15-1} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} \right) (6-\sqrt{3}) = \\
&= \left(\frac{12}{6}(\sqrt{15}+3) - \frac{28}{14}(\sqrt{15}+1) + 2+\sqrt{3} \right) (6-\sqrt{3}) = \\
&= (2\sqrt{15}+6-2\sqrt{15}-2+2+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) = \\
&= (6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) = 36-3 = 33.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad &\sqrt{3-\sqrt{5}}(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+3) = \\
&= \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2(3-\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})} = \\
&= \sqrt{(\sqrt{5}+3)(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})} = \\
&= \sqrt{(\sqrt{5}+3)(9-5)(\sqrt{10}-\sqrt{2})} = 2\sqrt{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2} = \\
&= 2\sqrt{(\sqrt{5}+3)(10-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}+2)} = \\
&= 2\sqrt{(\sqrt{5}+3)(12-2\cdot 2\sqrt{5})} = 2\sqrt{4(\sqrt{5}+3)(3-\sqrt{5})} = \\
&= 2\cdot 2\sqrt{9-5} = 8.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad &\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1+(\sqrt{2})^3}{\sqrt{2+2\sqrt{2}\cdot 1+1}} = \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}+2)}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{|\sqrt{2}+1|} = 3-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad &\sqrt{11-4\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \\
&= \sqrt{7-2\cdot 2\sqrt{7}+4} + \sqrt{7-2\cdot 3\sqrt{7}+9} = \\
&= \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = \\
&= |\sqrt{7}-2| + |\sqrt{7}-3| = \sqrt{7}-2+3-\sqrt{7} = 1,
\end{aligned}$$

так как $2 < \sqrt{7} < 3$.

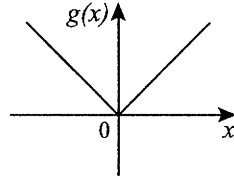
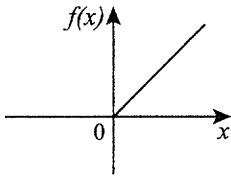
Практикум 5

Рассмотрим некоторые особенности работы с квадратными корнями, включающими алгебраические выражения.

Примеры:

1. $f(x) = (\sqrt{x})^2$; $g(x) = \sqrt{x^2}$.

При каких x возможно $f(x) = g(x)$? Поскольку



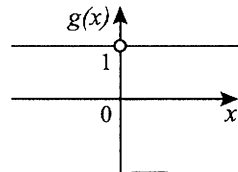
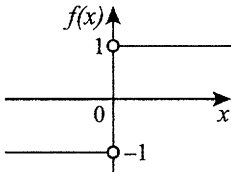
$$f(x) = (\sqrt{x})^2 = x \text{ на } [0; \infty);$$

$$g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \forall x \in \mathbb{R};$$

очевидно, что $f(x) = g(x)$ только на $[0; \infty)$.

2. $f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x^2}}$; $g(x) = x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}}$.

При каких x возможно $f(x) = g(x)$?



$$\text{Если } x > 0, \text{ то } f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = 1.$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^4}} = 1$$

$$\text{Если } x < 0, \text{ то } f(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = -1.$$

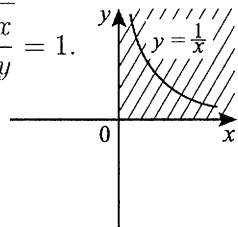
для $x \neq 0$.

Очевидно, что $f(x) = g(x)$ на $(0; \infty)$.

3. Постройте график уравнения: $y\sqrt{\frac{x}{y}} = 1$.

$$y\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \Rightarrow y > 0; x > 0.$$

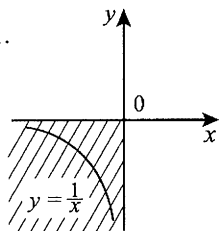
Тогда $y^2 \cdot \frac{x}{y} = 1$; $xy = 1$, то
ест. $y = 1/x$ при $x > 0, y > 0$.



4. Постройте график уравнения: $y\sqrt{\frac{x}{y}} = -1$.

$$y\sqrt{\frac{x}{y}} = -1 \Rightarrow y < 0; x < 0.$$

Тогда $y^2 \cdot \frac{x}{y} = 1$; $xy = 1$, то есть $y = 1/x$ при $x < 0, y < 0$.



5. Упростить: $A = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Напомним, что:

$$1) b = \begin{cases} (\sqrt{b})^2, & b \geq 0, \\ -(\sqrt{-b})^2, & b < 0; \end{cases}$$

$$2) \sqrt{b^2} = |b|;$$

$$3) \sqrt{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a}\sqrt{b}, & a \geq 0; \quad b \geq 0, \\ \sqrt{-a}\sqrt{-b}, & a < 0; \quad b < 0; \end{cases}$$

$$4) \sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, & a \geq 0; \quad b > 0, \\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}, & a < 0; \quad b < 0. \end{cases}$$

а) Пусть $a \geq 0, b > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } A &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - b}{b} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \\ &= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - b}{(\sqrt{b})^2} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab} - b + \sqrt{ab}}{(\sqrt{b})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - b}{(\sqrt{b})^2} = \frac{2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} - \frac{b}{\sqrt{b}^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{b}{b} = 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - 1 = 2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1. \end{aligned}$$

б) Пусть $a \leq 0$, $b < 0$. Тогда

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}; \quad |b| = -b; \quad b = -(\sqrt{-b})^2,$$

то есть

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - b}{b} + \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \\ &= \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - b}{-(\sqrt{-b})^2} + \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - b - \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}}{-(\sqrt{-b})^2} = \\ &= \frac{-b}{-(\sqrt{-b})^2} = \frac{-b}{b} = -1. \end{aligned}$$

Итак,

$$A = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1, & a \geq 0; \quad b > 0, \\ -1, & a \leq 0; \quad b < 0. \end{cases}$$

Но можно решить проще, если представить

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{|b|}.$$

Тогда

а) $a \geq 0$; $b > 0$.

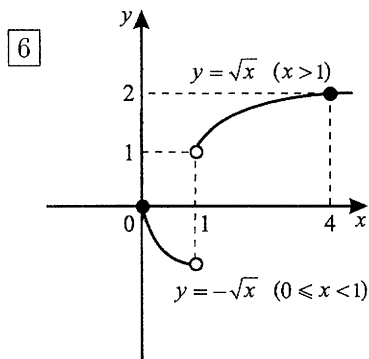
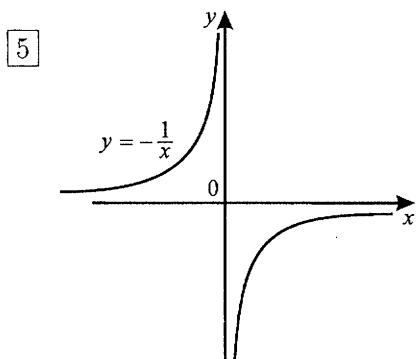
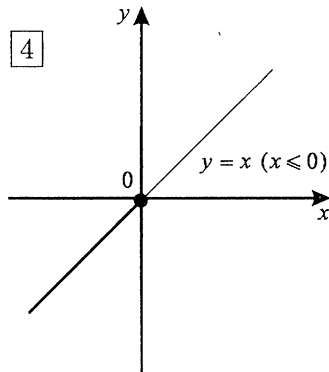
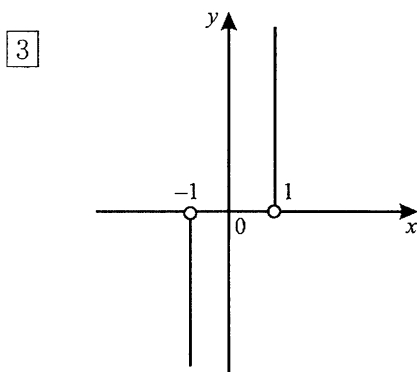
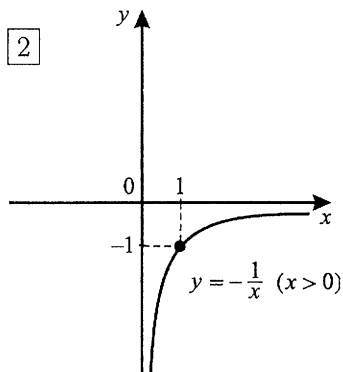
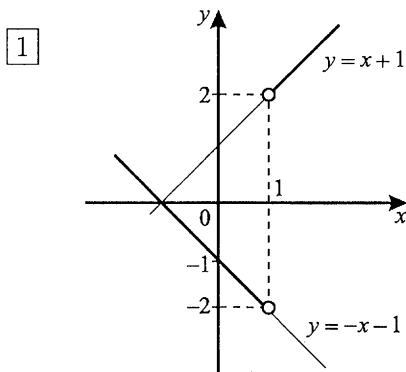
$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{|b|} = \\ &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{2\sqrt{ab} - b}{b} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1; \end{aligned}$$

б) $a < 0$; $b < 0$.

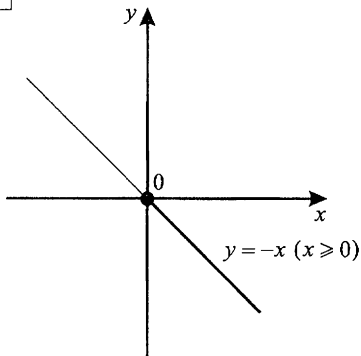
$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{|b|} = \\ &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{ab} - b - \sqrt{ab}}{b} = \frac{-b}{b} = -1. \end{aligned}$$

Тренировочная работа 4

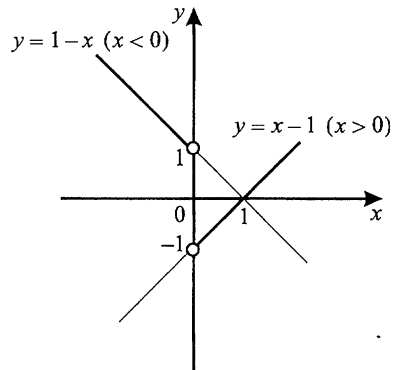
Даны графики уравнений и функций.



7



8



Найдите их аналитический вид из предложенных.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $\sqrt{-xy} = 1$ | 2. $xy\sqrt{\frac{1}{y^2}} = 1$ |
| 3. $y\sqrt{-\frac{x}{y}} = -1$ | 4. $y = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2}}$ |
| 5. $y = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}$ | 6. $-x = \sqrt{xy}$ |
| 7. $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ | 8. $\sqrt{-xy} = -y$ |

Ответ: 1. — $\boxed{5}$; 2. — $\boxed{3}$; 3. — $\boxed{2}$; 4. — $\boxed{8}$; 5. — $\boxed{6}$;
6. — $\boxed{4}$; 7. — $\boxed{1}$; 8. — $\boxed{7}$.

Практикум 6

Выполните действия:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \frac{a-b}{a} = && \text{при } \begin{cases} a > 0, \\ b \geq 0, \\ a \neq b. \end{cases} \\
 & = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \cdot \frac{a-b}{a} = \\
 & = \frac{a + \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{a+b}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{a}{\sqrt{ab}+a} + \frac{b}{\sqrt{ab}-b} - \frac{a}{a-b} = && \text{при } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ a \neq b. \end{cases} \\
 & = \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} + \frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{a}{a-b} = \\
 & = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a}{a-b} = \\
 & = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a}) - a}{a-b} = \\
 & = \frac{a - \sqrt{ab} + b + \sqrt{ab} - a}{a-b} = \frac{b}{a-b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} \right) = && \text{при } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x \neq y. \end{cases} \\
 & = \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{xy} - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \times \\
 & \quad \times \frac{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{yx}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \\
 & = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2}{x-y} = \\
 & = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} - \frac{3}{a-b} = \quad \text{при } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ a \neq b. \end{cases} \\
 & = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{3}{a-b} = \\
 & = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - 3\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a-b)} = \\
 & = \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - a + 2\sqrt{ab} - b - 3\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a-b)} = \\
 & = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a-b)} = \frac{1}{a-b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \left(\frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - (a+b) \right) : \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = \quad \text{при } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ a \neq b. \end{cases} \\
 & = \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left((\sqrt{a})^2 - \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - a - b \right) \times \\
 & \quad \times \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = (a - \sqrt{ab} + b - a - b) \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \\
 & = \frac{-\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}} = \quad \text{при } \begin{cases} a > 0, \\ b \geq 0, \\ a \neq b. \end{cases} \\
 & = \frac{\left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})} + \frac{\sqrt{ab} - a}{(a-b)\sqrt{a}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{a}} = \\
 & = \frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a} \cdot b - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{a}} = \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3\sqrt{a} \cdot b}{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = \frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \frac{(a-b)^2}{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}} + \frac{a^2 - b^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)} = \quad \text{при } \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a \neq b. \end{cases} \\
 & = (a-b) \left(\frac{a-b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} + \frac{a+b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} \right) = \\
 & = \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \cdot \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \\
 & = \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \cdot \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \\
 & = \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \times \\
 & \quad \times \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{a} + a\sqrt{b} - b\sqrt{b} + a\sqrt{a} + b\sqrt{a} - a\sqrt{b} - b\sqrt{b}}{a-b} = \\
 & = \frac{(a-b)(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) \cdot 2}{(a+\sqrt{ab}+b)(a-b)} = \frac{\left((\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 \right) \cdot 2}{a+\sqrt{ab}+b} = \\
 & = \frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)}{a + \sqrt{ab} + b} = 2(\sqrt{a} - \sqrt{b}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right) = \quad \text{при } a > 1. \\
 & = \left(\frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}{(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} \right) : \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{a+1-a} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}{a-(a-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}} = \\
 &= (\sqrt{a+1} - \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a-1}) \cdot \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}} = \\
 &= \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}} \cdot \sqrt{a-1} = \sqrt{a-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad &\frac{x^2+4}{x\sqrt{4 + \left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}} = \frac{x^2+4}{x\sqrt{4 + \frac{x^4-8x^2+16}{4x^2}}} = \frac{x^2+4}{x\sqrt{\frac{16x^2+x^4-8x^2+16}{4x^2}}} = \\
 &= \frac{x^2+4}{x\sqrt{\frac{x^4+8x^2+16}{4x^2}}} = \frac{x^2+4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)^2}} = \frac{x^2+4}{x\left|\frac{x^2+4}{2x}\right|} = A, \text{ где } A = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ -2, & x < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad &\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1} = \\
 &= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1} = A, \text{ где } A = \begin{cases} 1, & x > 2, \\ -1, & 1 \leq x < 2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

так как $\sqrt{x-1} > 1 \iff x > 2$,

$$\text{а } \sqrt{x-1} < 1 \iff \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2, \end{cases}$$

Важно помнить, что

$$\text{I. } \sqrt{a} < b \iff \begin{cases} b > 0, \\ a \geq 0, \\ a < b^2. \end{cases} \quad \text{II. } \sqrt{a} > b \iff \begin{cases} b \geq 0 \\ a > b^2 \\ b < 0 \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Но можно не надеяться на сообразительность, а обозначить $\sqrt{x-1} = t$ ($t \geq 0$).

Тогда $x = t^2 + 1$, и выражение приобретает вид:

$$\frac{\sqrt{t^2+1-2t}}{t-1} = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t-1} = \frac{|t-1|}{t-1} = A, \text{ где } A = \begin{cases} 1, & t > 1 \\ -1, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

и т. д.

Проверочная работа 2

Выполните действия и упростите:

1. $\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.
2. $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 4} - x}{\sqrt{x^2 - 4} + x} - \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x}{\sqrt{x^2 - 4} - x} \right) : \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}$.
3. $\left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - (x + y) \right) \cdot \sqrt{xy}$.
4. $\left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (2\sqrt{a})^2}{a - b} - (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1} \right) : \frac{4(\sqrt{a})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.
5. $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1+x} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} \right)$.
6. $\left(\frac{4a - \frac{9}{a}}{2\sqrt{a} - \frac{3}{\sqrt{a}}} + \frac{a - 4 + \frac{3}{a}}{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \right)^2$.
7. $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - b)} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a - b}$.
8. $\frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$.
9. $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} \right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$
при $x > a > 0$.
10. $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{2a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2(ab^{-1} + 1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1 - ba^{-1}}{1 + ba^{-1}}}$.

2

Степени с натуральными показателями

Свойства действий со степенями.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$; $n, m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad 2) (a^n)^m = a^{n \cdot m};$$

$$3) a^0 = 1 (a \neq 0); \quad 4) a^m : a^n = a^{m-n} (a \neq 0);$$

$$5) a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n (a \neq 0); \quad 6) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad 7) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0).$$

Практикум 7

Вычислите:

$$1. \frac{(2^3)^4 \cdot (2^3)^5}{16^2 \cdot 32^3} = \frac{2^{12} \cdot 2^{15}}{(2^4)^2 \cdot (2^5)^3} = \frac{2^{27}}{2^8 \cdot 2^{15}} = \frac{2^{27}}{2^{8+15}} = \\ = 2^{27-23} = 2^4 = 16.$$

$$2. \left(\frac{5^3}{6^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{5^{12} \cdot 2^5 \cdot 3^7}{6^8 \cdot 5^5 \cdot 5^7} = \frac{5^{12}}{5^{5+7}} \cdot \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^8 \cdot 3^8} = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3^1} = \frac{1}{24}.$$

$$3. \frac{(4^n)^2 \cdot 8^{n+1}}{(2^4)^n \cdot 2^{3n+2} \cdot 20} = \frac{4^{2n} \cdot 8^{n+1}}{2^{4n} \cdot 2^{3n+2} \cdot 20} = \frac{(2^2)^{2n} \cdot (2^3)^{n+1}}{2^{7n+2} \cdot 2^2 \cdot 5} = \\ = \frac{2^{4n} \cdot 2^{3n+3}}{2^{7n+4} \cdot 5} = \frac{2^{7n+3}}{2^{7n+4} \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}.$$

$$4. \frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9} = \frac{3^{19} (2 \cdot 3^1 - 5)}{(3^2)^9} = \frac{3^{19} \cdot 1}{3^{18}} = 3.$$

$$5. \frac{52 (3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19})}{(13 \cdot 8^4)^2} = \frac{52 \cdot 2^{19} (3 \cdot 2 + 7)}{13^2 \cdot 8^8} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 2^{19} \cdot 13}{13^2 (2^3)^8} = \\ = \frac{2^2 \cdot 2^{19}}{2^{24}} = \frac{2^{21}}{2^{24}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

$$6. \frac{25 (180 \cdot 6^7 - 108 \cdot 6^6)}{216^3 - 36^4} = \frac{5^2 \cdot 6^6 (180 \cdot 6 - 108)}{(6^3)^3 - (6^2)^4} = \\ = \frac{5^2 \cdot 6^6 (36 \cdot 5 \cdot 6 - 3 \cdot 36)}{6^9 - 6^8} = \frac{5^2 \cdot 6^8 (6 \cdot 5 - 3)}{6^8 (6 - 1)} = \\ = \frac{5^2 \cdot 27}{5} = 135.$$

$$7. \frac{(3^{15} + 3^{13}) \cdot 2^9}{(3^{14} + 3^{12}) \cdot 1024} = \frac{3^{13} (3^2 + 1) \cdot 2^9}{3^{12} (3^2 + 1) \cdot 2^{10}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$8. \frac{(9^{n+1} - 9^{n-1})^3}{(27^n + 13 \cdot 27^{n-1})^2} = \frac{(9^{n-1} (9^2 - 1))^3}{(27^{n-1} (27 + 13))^2} = \frac{9^{3n-3} \cdot 80^3}{27^{2n-2} \cdot 40^2} = \\ = \frac{(3^2)^{3n-3} \cdot (2 \cdot 40)^3}{(3^3)^{2n-2} \cdot 40^2} = \frac{3^{6n-6} \cdot 2^3 \cdot 40^3}{3^{6n-6} \cdot 40^2} = 8 \cdot 40 = 320.$$

$$9. (5^{n+1} - 5^{n-1}) : (5^{n-2}) - 49^{n+1} : 7^{2n+1} = \\ = 5^{n+1-n+2} - 5^{n-1-n+2} - 7^{2n+2} : 7^{2n+1} = \\ = 5^3 - 5 - 7^{2n+2-2n-1} = 120 - 7 = 113.$$

10. Сравните числа:

а) 216^3 и 54^4 .

$$216^3 - 54^4 = (6^3)^3 - (6 \cdot 9)^4 = 6^9 - 6^4 \cdot 9^4 = \\ = 6^4 (6^5 - 9^4) = 6^4 (2^5 \cdot 3^5 - (3^2)^4) = \\ = 6^4 (2^5 \cdot 3^5 - 3^8) = 6^4 \cdot 3^5 (2^5 - 3^3) > 0, \\ \text{то есть } 216^3 > 54^4.$$

б) 101^6 и 10^{12} .

Поскольку $10^{12} = (10^2)^6 = 100^6$ и $101 > 100$, $101^6 > 100^6$, значит, $101^6 > 10^{12}$.

Проверочная работа 3

Вычислите:

1.
$$\frac{18^2 \cdot 12^3 \cdot 8^2}{24^3 \cdot 6^2}.$$

2.
$$\frac{72^3 \cdot 48^3}{36^5 \cdot 16^3}.$$

3.
$$\frac{(9 \cdot 16^{n-1} + 16^n)^2}{(4^{n-1} + 4^{n-2})^4}.$$

4.
$$\left(\frac{7^4}{15^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5.$$

5.
$$\frac{(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}) \cdot 57}{(19 \cdot 27^4)^2}.$$

6.
$$\frac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}.$$

7.
$$\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}.$$

8.
$$\frac{3^{n+2} - 2 \cdot 3^n}{3^{n-1}} - \frac{36^{n+1}}{6^{2n-1}}.$$

9. Упростите
$$\frac{a^{3n} - a^{n-2}}{a^{2n-2} - a^{n-3}}.$$

10. Сравните числа:

а) 75^{10} и 15^{15} ;

б) 200^6 и 14^{12} .

3

Степени с дробными показателями

Рассмотрим еще ряд необходимых свойств.

$$1) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; \quad a > 0; m \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{Z}; a \in \mathbb{R}.$$

$$2) \sqrt[2k-1]{a \cdot b} = \sqrt[2k-1]{a} \cdot \sqrt[2k-1]{b}; \quad k \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$3) \sqrt[2k]{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b}; & a \geq 0; b \geq 0 \\ \sqrt[2k]{-a} \cdot \sqrt[2k]{-b}; & a \leq 0; b \leq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$4) \sqrt[2k-1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k-1]{a}}{\sqrt[2k-1]{b}}; \quad k \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0.$$

$$5) \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}; & a \geq 0; b > 0 \\ \frac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}; & a \leq 0; b < 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$6) \sqrt[n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a > 0; n, p \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{Z}; a \in \mathbb{R}.$$

$$7) \sqrt[2k]{a^{2m}} = \sqrt[k]{|a|^m}; \quad a \in \mathbb{R}; m, k \in \mathbb{N} \text{ при } k = m \quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

$$8) b \sqrt[2k-1]{a} = \sqrt[2k-1]{a \cdot b^{2k-1}}; \quad a, b \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}.$$

$$9) b \sqrt[2k]{a} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a \cdot b^{2k}}; & a \geq 0; b \geq 0 \\ -\sqrt[2k]{a \cdot b^{2k}}; & a \geq 0; b < 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$10) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad ab \neq 0.$$

Практикум 8

Вычислите (1-14):

$$1. \quad 8^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{1}{4}} + (3^2)^{\frac{1}{2}} = 4 - 2 + 3 = 5.$$

$$2. \quad \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{-3} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot 1,5^{-2} = \left(\frac{3}{5} \right)^{-2} \left(\frac{3}{2} \right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{5^{-2}} \cdot \frac{3^{-2}}{2^{-2}} = \frac{3^{-4}}{10^{-2}} =$$

$$= \left(\frac{3^4}{10^2} \right)^{-1} = \frac{10^2}{3^4} = \frac{100}{81}.$$

$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n, \quad ab \neq 0$

$$3. \quad 125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} + (2^4)^{\frac{1}{2}} + (7^3)^{\frac{1}{3}} = 25 + 4 + 7 = 36.$$

$$4. \quad \left(\left(\frac{5}{3} \right)^{-2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 0,6^{-2} = \left(\frac{5}{3} \right)^{-3} \left(\frac{3}{5} \right)^{-2} = \frac{3^3}{5^3} \cdot \frac{5^2}{3^2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$5. \quad 9^{-0,5} - \left(\frac{1}{8} \right)^{-\frac{4}{3}} + (0,25)^{-1,5} =$$

$$= (3^2)^{-0,5} - (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} + (2^{-2})^{-1,5} = 3^{-1} - 2^4 + 2^3 =$$

$$= \frac{1}{3} - 16 + 8 = -7\frac{2}{3}.$$

$$6. \quad \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{9} = (3^2)^{\frac{1}{4}} (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{7}{6}}.$$

$$7. \quad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = (2^2)^{\frac{1}{3}} (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{6}}.$$

$$8. \quad \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,81)^{-0,5} =$$

$$= (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(\frac{9}{10} \right)^2 \right)^{-0,5} =$$

$$= 2^3 + 2^2 \cdot \frac{10}{9} = 8 + \frac{40}{9} = 12\frac{4}{9}.$$

$$9. \quad 0,0016^{-\frac{3}{4}} + 0,04^{-\frac{1}{2}} - 0,216^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 =$$

$$= ((0,2)^4)^{-\frac{3}{4}} + ((0,2)^2)^{-\frac{1}{2}} - ((0,6)^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 =$$

$$= 5^3 + 5^1 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot 9 = 125 + 5 - 25 = 105,$$

так как $0,2 = 5^{-1}$.

$$10. 0,125^{-\frac{1}{3}} + 0,81^{-\frac{1}{2}} - 0,027^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= ((0,5)^3)^{-\frac{1}{3}} + ((0,9)^2)^{-\frac{1}{2}} - ((0,3)^3)^{-\frac{2}{3}} = 2 + \frac{10}{9} - \frac{100}{9} = -8,$$

так как $0,5 = 2^{-1}$.

$$11. \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x^{-3}}} : x^{-\frac{1}{6}} = (x \cdot x^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}} = x^{-\frac{1}{6}} : x^{-\frac{1}{6}} = 1.$$

$$12. \sqrt[5]{x^{-2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot x^{\frac{4}{15}} = (x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{4}{15}} = x^{-\frac{4}{15}} \cdot x^{\frac{4}{15}} = x^0 = 1.$$

$$13. \sqrt[3]{a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-1} \cdot \sqrt{a^3 b^{-2}}} = (a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-1} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-1})^{\frac{1}{3}} =$$

$$= (a^0 \cdot b^{-2})^{\frac{1}{3}} = b^{-\frac{2}{3}}.$$

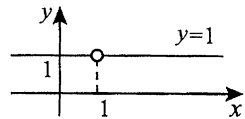
$$14. \frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{b}}{a^{-1}} \cdot (16 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{2}} + 1 \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}} (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} (b^{-\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} =$$

$$= a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \cdot b^0 \cdot 2 = 2a^{\frac{5}{8}}.$$

Постройте график (15, 16):

$$15. y = (x - 1)^0.$$

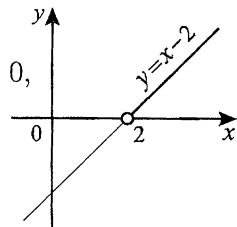
$$\text{Так как } \begin{cases} a^0 = 1 \\ a \neq 0 \end{cases}, \begin{cases} (x - 1)^0 = 1 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}.$$



$$16. y = \frac{(x - 2)^{\frac{1}{2}}}{(x - 2)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Так как a^q определена только при $a > 0$,

$$\begin{cases} y = (x - 2)^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right) = x - 2. \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$



Упражнения

Вычислите:

	№ 1	№ 2
1	$4 \cdot 36^{-\frac{1}{2}}$	$2 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$
2	$3 \cdot 216^{-\frac{1}{3}}$	$4 \cdot 5,76^{-\frac{1}{2}}$
3	$4^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}$	$16^{\frac{1}{4}} - 36^{\frac{1}{2}}$
4	$\sqrt[3]{8^2} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{125}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{64}} + \sqrt[4]{\frac{81}{16}} - \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} - \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} + \frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}$
6	$\sqrt[3]{343} - \sqrt[4]{0,0625}$	$\sqrt{36^3} - \sqrt[3]{27^2} + \sqrt[4]{625}$
7	$\sqrt[5]{0,00032} + \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$	$\sqrt[4]{1296} - \sqrt[5]{1024}$
8	$(0,0016)^{\frac{1}{2}} \cdot (0,0016)^{-\frac{1}{4}}$	$(0,216)^{-\frac{1}{3}} \cdot (0,36)^{\frac{1}{2}}$
9	$\sqrt[3]{3,7^4} \cdot \sqrt[4]{3,7^3} : \sqrt[2]{3,7}$	$\sqrt[4]{2,5^3} : \sqrt[12]{2,5} \cdot \sqrt[3]{2,5^4}$
10	$\sqrt[3]{1,8} \cdot \sqrt[3]{0,12}$	$\sqrt[4]{0,54} \cdot \sqrt[4]{0,24}$

	№ 3	№ 4
1	$7 \cdot 343^{-\frac{1}{3}}$	$9 \cdot 7,29^{-\frac{1}{2}}$
2	$14 \cdot 784^{-\frac{1}{2}}$	$22 \cdot 1331^{-\frac{1}{3}}$
3	$(0,008)^{-\frac{1}{3}} + (6,76)^{\frac{1}{2}}$	$(0,216)^{-\frac{1}{3}} - (2,25)^{-\frac{1}{2}}$
4	$\sqrt[5]{243} - \sqrt[4]{256} + \sqrt[3]{0,027}$	$\sqrt[3]{343} - \sqrt{4,84} + \sqrt[5]{0,00032}$
5	$\frac{\sqrt{0,032}}{\sqrt{0,2}} - \frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$
6	$\sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{1296} + \sqrt{961}$	$\sqrt[4]{256} + \sqrt[6]{9^3} - \sqrt[10]{32^2}$
7	$\sqrt[6]{729} + \sqrt[10]{1024}$	$\sqrt[9]{0,000064} - \sqrt{8,41}$
8	$(0,0625)^{\frac{1}{4}} \cdot (0,0625)^{-\frac{3}{4}}$	$(0,96)^{\frac{1}{4}} \cdot (2,16)^{\frac{1}{4}}$
9	$\sqrt[4]{6^5} \cdot \sqrt[5]{6^4} : \sqrt[20]{6}$	$\sqrt[20]{0,25} : \sqrt[4]{0,25^5} : \sqrt[5]{0,25^4}$
10	$\sqrt[3]{0,27} \cdot \sqrt[3]{0,8}$	$\sqrt[4]{2,16} \cdot \sqrt[4]{0,06}$

Ответы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ 1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-4\frac{2}{3}$	6,5	0,7	$\frac{1}{5}$	13,69	0,6
№ 2	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	-4	$\frac{5}{4}$	7,2	212	2	1	6,25	0,6
№ 3	1	$\frac{1}{2}$	7,6	-0,7	-10,6	34	5	4	36	0,6
№ 4	$3\frac{1}{3}$	2	1	5	-2,5	5	-2,7	1,2	16	0,6

Тренировочная работа 5**1. Вычислите:**

1) $2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$.

2) $36^{-\frac{1}{2}}$.

3) $5 \cdot 64^{-\frac{1}{6}}$.

4) $8^{\frac{2}{3}} - 16^{-\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}}$.

5) $\sqrt[3]{90 \cdot 75 \cdot 108}$.

6) $(3\sqrt{7,5})^2 - \sqrt{3}\sqrt{0,12} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$.

2. Упростите:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}$.

2) $\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

3) $\frac{\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 \cdot y^{\frac{5}{2}}}{y^{-1}}$.

4) $\frac{(y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}$.

3. Выполните действия:

1) $c^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[4]{c}$.

2) $a^{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{a}$.

3) $\sqrt[3]{x\sqrt{x^{-3}}} : x^{-\frac{1}{6}}$.

4) $(\sqrt{5} - 3) \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^{-2}}$.

4. Сократите дробь:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 2a^{\frac{1}{2}}}.$$

$$2) \frac{a - 4}{a - 2a^{\frac{1}{2}}}.$$

$$3) \frac{3a^{\frac{1}{2}} - a}{9 - a}.$$

$$4) \frac{x - y}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}.$$

$$5) \frac{6 - \sqrt{6}}{\sqrt{18} - \sqrt{3}}.$$

$$6) \frac{x + 9}{\sqrt{-x} + 3}.$$

Решение тренировочной работы 5

1. Вычислите:

1) $2 \cdot 27^{\frac{1}{3}} = 2 (3^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}.$ ³

2) $36^{-\frac{1}{2}} = (6^2)^{-\frac{1}{2}} = 6^{-1} = \boxed{\frac{1}{6}}.$

3) $5 \cdot 64^{-\frac{1}{6}} = 5 \cdot (2^6)^{-\frac{1}{6}} = 5 \cdot 2^{-1} = \boxed{2,5}.$

4) $8^{\frac{2}{3}} - 16^{-\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{-\frac{1}{4}} + (3^2)^{\frac{1}{2}} = 2^2 - \frac{1}{2} + 3 = \boxed{6,5}.$

5) $\sqrt[3]{90 \cdot 75 \cdot 108} = \sqrt[3]{3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2^2} =$
 $= \sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3 \cdot 2^3} = 3^2 \cdot 5 \cdot 2 = \boxed{90}.$

6) $(3\sqrt{7,5})^2 - \sqrt{3}\sqrt{0,12} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 9 \cdot 7,5 - \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 0,04} + \sqrt{\frac{2}{8}} =$
 $= 67,5 - 3 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} = 68 - 0,6 = \boxed{67,4}.$

2. Упростите:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = \boxed{a^{\frac{1}{6}}}.$

2) $\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \boxed{x}.$

3) $\frac{\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 \cdot y^{\frac{5}{2}}}{y^{-1}} = y^{-\frac{3}{4} \cdot 4} \cdot y^{\frac{5}{2}} \cdot y^1 = y^{-3 + \frac{5}{2} + 1} = \boxed{y^{\frac{1}{2}}}.$

4) $\frac{(y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}} = y^{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = y^{-1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \boxed{y}.$

³ Для удобства будем ответ помещать в прямоугольник.

3. Выполните действия:

$$1) c^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[4]{c} = c^{\frac{7}{4}} \cdot c^{\frac{1}{4}} = c^{\frac{7}{4} + \frac{1}{4}} = \boxed{c^2}.$$

$$2) a^{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{7}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} = \boxed{a^4}.$$

$$3) \sqrt[3]{x\sqrt{x^{-3}}} : x^{-\frac{1}{6}} = \left(x \cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} : x^{-\frac{1}{6}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} : x^{-\frac{1}{6}} = \\ = x^{-\frac{1}{6}} : x^{-\frac{1}{6}} = \boxed{1}.$$

$$4) (\sqrt{5} - 3) \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^{-2}} = -\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2 (\sqrt{5} - 3)^{-2}} = \\ = -\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^0} = \boxed{-1}.$$

4. Сократите дробь:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 2a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - 2)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \boxed{a^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$2) \frac{a - 4}{a - 2a^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}} - 2)(a^{\frac{1}{2}} + 2)}{a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - 2)} = \\ = \frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{a^{\frac{1}{2}}} = \boxed{1 + 2a^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$3) \frac{3a^{\frac{1}{2}} - a}{9 - a} = \frac{a^{\frac{1}{2}} (3 - a^{\frac{1}{2}})}{(3 + a^{\frac{1}{2}})(3 - a^{\frac{1}{2}})} = \boxed{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{3 + a^{\frac{1}{2}}}}.$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} &= \\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right) \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} = \boxed{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

$$5) \frac{6 - \sqrt{6}}{\sqrt{18} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{6} - 1)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} 6) \frac{x+9}{\sqrt{-x}+3} &= \frac{-(\sqrt{-x})^2 + 3^2}{\sqrt{-x}+3} = \\ &= \frac{(3 + \sqrt{-x})(3 - \sqrt{-x})}{3 + \sqrt{-x}} = \boxed{3 - \sqrt{-x}}. \end{aligned}$$

Проверочная работа 4

Вычислите (1–12):

1. $3 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$.

2. $64^{-\frac{1}{2}}$.

3. $2 \cdot 243^{-\frac{1}{5}}$.

4. $\sqrt[3]{200 \cdot 45 \cdot 24}$.

5. $(5\sqrt{2,7})^2 - \sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,15} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$.

6. $36^{\frac{3}{2}} + 64^{\frac{2}{3}} - 625^{\frac{1}{2}}$.

7. $(0,04)^{-1,5} \cdot (0,125)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

8. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{27}$.

9. $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4}$.

10. $16^{0,5} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

11. $0,008^{-\frac{2}{3}} + 0,064^{-\frac{1}{3}} - 0,0625^{-\frac{3}{4}}$.

12. $0,25^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 0,0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

Упростите (13–16):

$$13. b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}}.$$

$$14. \frac{c^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{1}{6}}}.$$

$$15. \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}}.$$

$$16. \frac{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot c^{-\frac{7}{3}}}{c^{-\frac{4}{3}}}.$$

Выполните действия (17–24):

$$17. x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x}.$$

$$18. y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y}.$$

$$19. (\sqrt{3} - 2) \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^{-2}}.$$

$$20. \sqrt[4]{a^4 \sqrt{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}}.$$

$$21. \sqrt{a^3 \sqrt{a^{-2}}} : a^{-\frac{1}{6}}.$$

$$22. \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} : \sqrt[8]{a^{-1}}.$$

$$23. \sqrt{\frac{x^{-2} \sqrt{x^3}}{a^{-1}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{a^{-3}}}.$$

$$24. \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}.$$

Сократите дробь (25–30)

$$25. \frac{5x^{\frac{1}{2}} + x}{5 + x^{\frac{1}{2}}}.$$

$$26. \frac{1 - a}{1 + a^{\frac{1}{2}}}.$$

$$27. \frac{2y^{\frac{1}{2}} - y}{4 - y}.$$

$$28. \frac{m + n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}.$$

$$29. \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}.$$

$$30. \frac{36 + x}{6 - \sqrt{-x}}.$$

Практикум 9

Вычислите:

1. $\sqrt{\frac{27^{-1} \cdot 9^5}{16^0 \cdot 3^{-3}}}$.

2. $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$.

3. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right)$.

4. $\frac{\sqrt{7\sqrt{7}\sqrt{7}}}{\sqrt[8]{7-1}}$.

5. $\sqrt{\sqrt{55} \cdot \sqrt{275} \cdot \sqrt{605}}$.

6. $\left(\frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}\right)^{-2}$.

7. $\frac{17 + 2\sqrt{30}}{\sqrt{15} + \sqrt{2}} \sqrt{17 - 2\sqrt{30}}$.

8. $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}}$.

9. $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{108}} - \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{48}}$.

10. $\frac{\left(24^{\frac{2}{3}} - 40^{\frac{2}{3}}\right) \left(5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(40^{\frac{1}{3}} + 56^{\frac{1}{3}}\right) \left(3^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}}\right)}$.

$$11. \left(\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{2^{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{-1}}}} \cdot \sqrt[3]{2^{-8}} \right)^{-0,4}.$$

$$12. \left(2^2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3^{\frac{7}{6}} \cdot 32^{-1}} \cdot \sqrt[3]{3^{-2}} \right)^{-8}.$$

$$13. \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right) : \frac{48^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{5}{4}}}{3}.$$

$$14. \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$$

Решение практикума 9

Вычислите:

$$1. \sqrt{\frac{27^{-1} \cdot 9^5}{16^0 \cdot 3^{-3}}} = \sqrt{\frac{3^{-3} \cdot (3^2)^5}{1 \cdot 3^{-3}}} = \sqrt{3^{10}} = 3^5 = \boxed{243}.$$

$$2. \frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}} = \sqrt{\frac{2,8 \cdot 4,2}{0,24}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 42}{24}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3}{2^3 \cdot 3}} = \boxed{7}.$$

$$\begin{aligned} 3. & \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \right) = \\ & = \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{(3 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) + (3 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \\ & = \frac{(3 - 1)\sqrt{3} \left((\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 \right)}{3 \cdot \sqrt{3} (3 - 1)} = \\ & = \frac{1}{3} (3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1) = \frac{8}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

$$4. \frac{\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}{\sqrt[8]{7^{-1}}} = \frac{7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{7^{-\frac{1}{8}}} = 7^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \boxed{7}.$$

$$\begin{aligned} 5. & \sqrt{\sqrt{55} \cdot \sqrt{275} \cdot \sqrt{605}} = \sqrt{\sqrt{5 \cdot 11} \cdot \sqrt{25 \cdot 11} \cdot \sqrt{121 \cdot 5}} = \\ & = \sqrt{\sqrt{5^4 \cdot 11^4}} = \sqrt{5^2 \cdot 11^2} = 5 \cdot 11 = \boxed{55}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. & \left(\frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} \right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^{-2} = \\ & = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 = \boxed{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} & \frac{17 + 2\sqrt{30}}{\sqrt{15} + \sqrt{2}} \sqrt{17 - 2\sqrt{30}} = \\ & = \frac{15 + 2\sqrt{15 \cdot 2} + 2}{\sqrt{15} + \sqrt{2}} \sqrt{15 - 2\sqrt{15 \cdot 2} + 2} = \\ & = \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{15} + \sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{15} - \sqrt{2})^2} = \\ & = (\sqrt{15} + \sqrt{2})(\sqrt{15} - \sqrt{2}) = 15 - 2 = \boxed{13}. \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} & \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(4 - 2\sqrt{2})^2 (6 + 4\sqrt{2})} = \\ & = \sqrt[4]{(16 - 16\sqrt{2} + 8)(6 + 4\sqrt{2})} = \\ & = \sqrt[4]{8(3 - 2\sqrt{2}) \cdot 2(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt[4]{16(9 - 8)} = \boxed{2}. \end{aligned}$$
9.
$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{108}} - \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{48}} = \sqrt[3]{\frac{256}{108}} - \sqrt[4]{\frac{243}{48}} = \sqrt[3]{\frac{2^8}{27 \cdot 4}} - \sqrt[4]{\frac{3^5}{16 \cdot 3}} = \\ & = \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^3}} - \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \boxed{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$
10.
$$\begin{aligned} & \frac{\left(24^{\frac{2}{3}} - 40^{\frac{2}{3}}\right) \left(5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(40^{\frac{1}{3}} + 56^{\frac{1}{3}}\right) \left(3^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{8^{\frac{2}{3}} \left(3^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}}\right) \left(5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}\right)}{8^{\frac{1}{3}} \left(5^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}}\right) \left(3^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{2}{3}}\right)} = \\ & = 8^{\frac{1}{3}} = \boxed{2}. \end{aligned}$$
11.
$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{2^{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{-1}}}} \cdot \sqrt[3]{2^{-8}}\right)^{-0,4} = \left(\frac{2^{-\frac{1}{3}}}{2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} \cdot 2^{-\frac{8}{3}}\right)^{-0,4} = \\ & = \left(2^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{8}{3}}\right)^{-0,4} = 2^{-2,5(-0,4)} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad & \left(2^2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3^{\frac{7}{6}} \cdot 32^{-1} \cdot \sqrt[3]{3^{-2}}} \right)^{-8} = \\
 & = \left(2^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\frac{7}{6}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-5} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-8} = \\
 & = 2^{-16} \cdot 3^{-2} \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-5} \right)^{-4} = 2^{-16} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{20} = \\
 & = 2^4 \cdot 3^{-4} = \boxed{\frac{16}{81}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad & \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right) : \frac{48^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{5}{4}}}{3} = \\
 & = \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right) \frac{3}{16^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{5}{4}}} = \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right) \frac{3}{2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = \\
 & = \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right) \frac{3}{2 \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right)} = \boxed{1,5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad & \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \\
 & = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^3 - (\sqrt{2})^3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2} = \\
 & = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \sqrt{6} \cdot \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}} = \\
 & = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

Тренировочная работа 6

Вычислите:

1. $\sqrt[6]{\frac{9^{-3} \cdot 27^4}{12^0 \cdot 3^{-6}}}$
2. $\frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{6,3}}{\sqrt{0,14}}$
3. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} + \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right)$
4. $\frac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}{\sqrt[8]{3^{-1}}}$
5. $\sqrt{\sqrt{39} \cdot \sqrt{117} \cdot \sqrt{507}}$
6. $\left(\frac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{21}-\sqrt{3}}\right)^{-2}$
7. $\frac{16+2\sqrt{39}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}} \sqrt{16-2\sqrt{39}}$
8. $\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$
9. $\sqrt{\frac{81^{-2}\sqrt{81^3}}{5^{-2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{27^4}{5^{-3}}}$
10. $\left(3 \cdot \sqrt[4]{2^3} : \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}} \cdot 81 \cdot \sqrt{2^{-3}}}\right)^{-6}$
11. $\left(5^{-\frac{1}{4}} - \frac{1-5^{-\frac{3}{4}}}{5^{-\frac{1}{4}}-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\left(5^{-\frac{3}{4}}+1\right) : \left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right) - \sqrt[4]{5^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(5^{-1}-\sqrt{5^{-3}}\right)^{-1}}$
12. $\left(\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[4]{9}} - 1\right) \frac{(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3})^2 - 2\sqrt[4]{15}}{\sqrt{3}}$
13. $\frac{\left(7^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}}\right) \left(7^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{7^{-1} + 6^{-1} - \left(7^{-\frac{2}{3}} - 6^{-\frac{2}{3}}\right) \left(7^{-\frac{1}{3}} - 6^{-\frac{1}{3}}\right)} - 2\sqrt{42}$

Решение тренировочной работы 6

Вычислите:

$$1. \sqrt[6]{\frac{9^{-3} \cdot 27^4}{12^0 \cdot 3^{-6}}} = \sqrt[6]{\frac{(3^2)^{-3} \cdot (3^3)^4}{1 \cdot 3^{-6}}} = \sqrt[6]{\frac{3^{-6} \cdot 3^{12}}{3^{-6}}} = \sqrt[6]{3^{12}} = \boxed{9}.$$

$$2. \frac{\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{6,3}}{\sqrt{0,14}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 63}{14}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7}{2 \cdot 7}} = \sqrt{3^4} = \boxed{9}.$$

$$\begin{aligned} 3. & \left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}} \right) \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} \right) = \\ & = \frac{(\sqrt{5})^2 - 1}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{(5 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1) + (5 + \sqrt{5})(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \\ & = \frac{(5 - 1)\sqrt{5} \left((\sqrt{5} - 1)^2 + (\sqrt{5} + 1)^2 \right)}{5\sqrt{5}(5 - 1)} = \\ & = \frac{1}{5} (5 - 2\sqrt{5} + 1 + 5 + 2\sqrt{5} + 1) = \frac{12}{5} = \boxed{2,4}. \end{aligned}$$

$$4. \frac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}{\sqrt[8]{3^{-1}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \boxed{3}.$$

$$\begin{aligned} 5. & \sqrt{\sqrt{39} \cdot \sqrt{117} \cdot \sqrt{507}} = \\ & = \sqrt{\sqrt{3 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 169}} = \\ & = \sqrt{\sqrt{3^4 \cdot 13^4}} = \sqrt{3^2 \cdot 13^2} = 3 \cdot 13 = \boxed{39}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. & \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{\sqrt{21} - \sqrt{3}} \right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{7} - 1)} \right)^{-2} = \\ & = \left(\sqrt{\frac{7}{3}} \right)^{-2} = \left(\sqrt{\frac{3}{7}} \right)^2 = \boxed{\frac{3}{7}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & \frac{16 + 2\sqrt{39}}{\sqrt{13} + \sqrt{3}} \sqrt{16 - 2\sqrt{39}} = \\
& = \frac{13 + 2\sqrt{13 \cdot 3} + 3}{\sqrt{13} + \sqrt{3}} \sqrt{13 - 2\sqrt{13 \cdot 3} + 3} = \\
& = \frac{(\sqrt{13} + \sqrt{3})^2 \sqrt{(\sqrt{13} - \sqrt{3})^2}}{\sqrt{13} + \sqrt{3}} = \\
& = (\sqrt{13} + \sqrt{3})(\sqrt{13} - \sqrt{3}) = 13 - 3 = \boxed{10}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(4 + 2\sqrt{2})^2 (6 - 4\sqrt{2})} = \\
& = \sqrt[4]{(16 + 16\sqrt{2} + 8)(6 - 4\sqrt{2})} = \\
& = \sqrt[4]{8(3 + 2\sqrt{2})2(3 - 2\sqrt{2})} = \sqrt[4]{16(9 - 8)} = \boxed{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & \sqrt{\frac{81^{-2}\sqrt{81^3}}{5^{-2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{27^4}{5^{-3}}} = \sqrt{\frac{(3^4)^{-2} \cdot ((3^4)^3)^{\frac{1}{2}}}{5^{-2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(3^3)^4}{5^{-3}}} = \\
& = \sqrt{\frac{3^{-8} \cdot 3^6}{5^{-2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3^{12}}{5^{-3}}} = \frac{3^{-1}}{5^{-1}} \cdot \frac{3^4}{5^{-1}} = 27 \cdot 25 = \boxed{675}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & \left(3 \cdot \sqrt[4]{2^3} : \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}} \cdot 81 \cdot \sqrt{2^{-3}}} \right)^{-6} = \\
& = \left(3 \cdot 2^{\frac{3}{4}} \right)^{-6} : \left(2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^4 \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \right)^{-2} = \\
& = 3^{-6} \cdot 2^{-\frac{9}{2}} : \left(2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{-8} \cdot 3^3 \right) = \\
& = 3^{-6} \cdot 2^{-\frac{9}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^5 = 3^{-1} \cdot 2^{-4} = \boxed{\frac{1}{48}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. & \left(5^{-\frac{1}{4}} - \frac{1-5^{-\frac{3}{4}}}{5^{-\frac{1}{4}}-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\left(5^{-\frac{3}{4}}+1\right)\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)-\sqrt{5^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(5^{-1}-\sqrt{5^{-3}}\right)^{-1}} = \\
& = \left(5^{-\frac{1}{4}} + \left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^2 + 5^{-\frac{1}{4}} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\
& \quad \times \frac{\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^2 - 5^{-\frac{1}{4}} + 1 - 5^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(5^{-1} - 5^{-\frac{3}{2}}\right)^{-1}} = \\
& = \left(\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}-1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{(5^{-1})^{-1} \cdot \left(1-5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}} = \\
& = \left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)^{-1} \cdot \frac{\left|5^{-\frac{1}{4}}-1\right|^{-1}}{5\left(1-5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}} = \left(5^{-\frac{1}{4}} < 1\right) \\
& = \frac{\left(\left(5^{-\frac{1}{4}}+1\right)\left(5^{-\frac{1}{4}}-1\right)\right)^{-1}}{5\left(5^{-\frac{1}{2}}-1\right)^{-1}} = \frac{\left(5^{-\frac{1}{2}}-1\right)^{-1}}{5\left(5^{-\frac{1}{2}}-1\right)^{-1}} = \frac{1}{5} = \boxed{0,2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. & \left(\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[4]{9}} - 1\right) \frac{(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3})^2 - 2\sqrt[4]{15}}{\sqrt{3}} = \\
& = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 1\right) \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt[4]{15} + \sqrt{3} - 2\sqrt[4]{15}}{\sqrt{3}} = \\
& = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5-3}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. & \frac{\left(7^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}}\right) \left(7^{\frac{1}{6}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{6}} \cdot 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{7^{-1} + 6^{-1} - \left(7^{-\frac{2}{3}} - 6^{-\frac{2}{3}}\right) \left(7^{-\frac{1}{3}} - 6^{-\frac{1}{3}}\right)} - 2\sqrt{42} = \\
& = \frac{\left(7^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}}\right) \left(7^{-\frac{1}{3}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} \left(7^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}{\left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(6^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(7^{-\frac{1}{3}} + 6^{-\frac{1}{3}}\right) \left(7^{-\frac{1}{3}} - 6^{-\frac{1}{3}}\right)^2} - 2\sqrt{42} = \\
& = \frac{7^{\frac{1}{3}} 6^{\frac{1}{3}} \left(7^{-\frac{1}{3}} + 6^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 6^{-\frac{2}{3}} \left(7^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(7^{-\frac{1}{3}} + 6^{-\frac{1}{3}}\right) \left(7^{-\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} + 6^{-\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}} + 2 \cdot 7^{-\frac{1}{3}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} - 6^{-\frac{2}{3}}\right)} - \\
& - 2\sqrt{42} = \frac{7^{-\frac{1}{3}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} \left(7^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}\right)^2}{7^{-\frac{1}{3}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}}} - 2\sqrt{42} = \\
& = 7 + 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} + 6 - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} = \boxed{13}.
\end{aligned}$$

Практикум 10

Вычислите (1-2):

$$1. -0,3^0 \left(\left(\frac{6}{5} \right)^{-4} \right)^{-0,25} \cdot 0,36^{-0,5} \cdot \sqrt{0,0001^{-1}} =$$

$$= -1 \cdot \frac{6}{5} \cdot 0,6^{-1} \cdot 0,1^{-2} = -1 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{6} \cdot 10^2 = -200.$$

$$2. \sqrt{0,1^{-4}} \cdot \left(\frac{2}{13} \right)^0 \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-4} \right)^{-0,5} : 0,81^{-0,5} =$$

$$= 0,1^{-2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 : 0,9^{-1} = 100 \cdot \frac{4}{9} : \frac{10}{9} = 40.$$

Выполните действия и упростите (3-12):

$$3. \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + 2}{x^{\frac{1}{2}} - 2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{x^{\frac{1}{2}} + 2} - \frac{16}{x - 4} \right)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{(x^{\frac{1}{2}} + 2)^2 + (x^{\frac{1}{2}} - 2)^2 - 16}{(x^{\frac{1}{2}} + 2)(x^{\frac{1}{2}} - 2)} \right)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{x + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4 + x - 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4 - 16}{x - 4} \right)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{2(x - 4)}{x - 4} \right)^{-2} = \frac{1}{4}.$$

$$4. (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) : \left(\frac{b}{a^{\frac{3}{4}}} - \frac{b^{\frac{5}{4}}}{a} \right) =$$

$$= (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) : \frac{b \cdot a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{5}{4}}}{a} =$$

$$= (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) \cdot \frac{a}{b \cdot (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})} = \frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \left(\frac{a^{\frac{1}{4}} + 4}{a^{\frac{1}{4}} - 4} + \frac{a^{\frac{1}{4}} - 4}{a^{\frac{1}{4}} + 4} - \frac{64}{a^{\frac{1}{2}} - 16} \right)^{-3} = \\
 & = \left(\frac{(a^{\frac{1}{4}} + 4)^2 + (a^{\frac{1}{4}} - 4)^2 - 64}{(a^{\frac{1}{4}} - 4)(a^{\frac{1}{4}} + 4)} \right)^{-3} = \\
 & = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 8a^{\frac{1}{4}} + 16 + a^{\frac{1}{2}} - 8a^{\frac{1}{4}} + 16 - 64}{a^{\frac{1}{2}} - 16} \right)^{-3} = \\
 & = \left(\frac{2(a^{\frac{1}{2}} - 16)}{a^{\frac{1}{2}} - 16} \right)^{-3} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \left(\frac{1}{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^{-2}} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} \right)^2 \cdot (ab)^{-\frac{1}{2}} = \\
 & = \left((a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2 - (a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b) \right)^2 \cdot (ab)^{-\frac{1}{2}} = \\
 & = (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - (a + b) \right) : \frac{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \left(a - a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b - a - b \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = \frac{ab}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \left(\frac{a - b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\
 & = \left(\frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right) \left(\frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad &\left(9^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{4}}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) = \\
 &= \left(9^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(9^{-0,25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) = \\
 &= 9^{-\frac{1}{2}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} - (8^{\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad &\left(\frac{x^2 + y^2}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} - \frac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot xy^{-1} = \\
 &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} - \frac{x + y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2 - x^2 - xy}{x(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} \cdot \frac{x}{y} = \\
 &= \frac{y(y - x)}{x(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} \cdot \frac{x}{y} = \frac{(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} = y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad &\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{\sqrt[3]{a^{-1} - ba^{-2}}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} - ab = \\
 &= \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{(a(a - b))^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - ab = \\
 &= \frac{(a - b)(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{a^{\frac{2}{3}} \cdot (a - b)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(a - b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}} - ab =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a-b)(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)}{(a-b)} - ab = \\
&= (a+b - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(a+b + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}) - ab = \\
&= (a+b)^2 - (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2 - ab = a^2 + 2ab + b^2 - ab - ab = a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

12. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} =$
 $= \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2$, так как
 $(\sqrt{2}+1)^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3 =$
 $= 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$ и
 $(\sqrt{2}-1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 1^2 - 1^3 =$
 $= 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7.$

Но если не догадаться, как тогда решать? Попробуем иначе. Допустим,

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}, & b &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}, \text{ тогда получим} \\
a^3 &= 5\sqrt{2}+7, & b^3 &= 5\sqrt{2}-7, \\
a^3 - b^3 &= 14.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} = \\
&= \sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} = \sqrt[3]{50-49} = 1.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b) \left((a-b)^2 + 3ab \right); \\
(a-b) \left((a-b)^2 + 3 \cdot 1 \right) &= 14, \quad a-b = t, \quad t(t^2 + 3) = 14; \\
t^3 + 3t - 14 &= 0, \quad t^3 - 4t + 7t - 14 = 0, \\
t(t^2 - 4) + 7(t-2) &= 0; \\
(t-2)(t(t+2) + 7) &= 0, \quad (t-2)(t^2 + 2t + 7) = 0; \\
\begin{cases} t-2 = 0 \\ (t+1)^2 + 6 = 0 \end{cases} &\iff t = 2.
\end{aligned}$$

Итак, $a-b = 2$, то есть $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

Проверочная работа 5

Вычислите (1–6):

$$1. (-0,2)^0 \cdot \left(\left(\frac{5}{6} \right)^4 \right)^{-0,25} \cdot 1,2^{-1} \cdot \sqrt{0,01^{-3}}.$$

$$2. \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{-4} \right)^{-0,75} \cdot 0,09^{-0,5} \cdot (-3)^0 \cdot \sqrt{0,1^{-8}}.$$

$$3. \left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{0,5^{-1}} \right) \cdot \left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{0,5^{-1}} \right).$$

$$4. \frac{(\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{81})(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2}{5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}}.$$

$$5. \frac{(3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})}{(\sqrt{15} - \sqrt{10})^2 (2\sqrt{15} + 2\sqrt{10})^2}.$$

$$6. \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7})(\sqrt{18} + \sqrt{2})^2}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{56}}}.$$

Упростите (7–15):

$$7. \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} - 1} + \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{4}{a - 1} \right)^{-3}$$

$$8. \left(\frac{a}{b^{\frac{5}{4}}} - \frac{a^{\frac{3}{4}}}{b} \right) (b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})^{-1}.$$

$$9. \left(\frac{2 + x^{\frac{1}{4}}}{2 - x^{\frac{1}{4}}} - \frac{2 - x^{\frac{1}{4}}}{2 + x^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \frac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$10. \left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - (x + y) \right) \cdot \sqrt{xy}.$$

$$11. \left(\frac{p^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{3}{2}}}{p - q} - \frac{p - q}{p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot (\sqrt{pq})^{-1}.$$

$$12. \left((m + n)(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}})^{-1} + (m \cdot n)^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{1}{(m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}})^{-1}}.$$

$$13. \left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} + (xy)^{\frac{1}{2}} \right) : (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}).$$

$$14. \left(\frac{a^2 - b^2}{a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{1}{2}}} - \frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right) : \left(\frac{a}{b} \right)^{-1}.$$

$$15. (a + 1)^{0,25} \cdot \frac{\sqrt[4]{(1 - 2a + a^2)(1 - a^2)(1 - a)}}{a^2 + 2a - 3} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3}$$

при $-1 < a < 1$.

4

Решение более сложных примеров

Практикум 11

Упростите (1–10):

$$\begin{aligned} 1. & \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{a^3 - b^3}{a \cdot b^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^2} \left(\frac{b}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b} \right) = \\ & = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{a^3 - b^3}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}})} \cdot \frac{b - (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} = \\ & = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})(b - a + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} - b)}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})} = \\ & = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}) \cdot a^{\frac{1}{2}} (2b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}})} = \\ & = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} = -\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & \frac{8a}{3} - \left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}} + 2}{3a^{-\frac{1}{3}} - 2} \right)^2 : \left[\frac{4}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^3} - \frac{1}{8a - 27} \right] = \\ & = \frac{8a}{3} - \left[\frac{a^{-\frac{1}{3}}(3 + 2a^{\frac{1}{3}})}{a^{-\frac{1}{3}}(3 - 2a^{\frac{1}{3}})} \right]^2 : \left[\frac{4(4a^{\frac{2}{3}} + 6a^{\frac{1}{3}} + 9) - (2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^3(4a^{\frac{2}{3}} + 6a^{\frac{1}{3}} + 9)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8a}{3} - \frac{(3 + 2a^{\frac{1}{3}})^2 \cdot (2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2 \cdot (8a - 27)}{(3 - 2a^{\frac{1}{3}})^2 \cdot 3 \cdot (2a^{\frac{1}{3}} + 3)^2} = \\
 &= \frac{8a}{3} - \frac{8a - 27}{3} = 9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \frac{3^{1,5}}{3^{1,5}a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{5}{6}} + 3^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} + 3)^2} \left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{a - 27} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - 3} \right) = \\
 &= \frac{3^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 3^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}} + 3)^2} \cdot \frac{3a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} + 9}{a - 27} = \\
 &= \frac{3^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 3^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}} + 3)^2} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}} + 3)^2}{(a^{\frac{1}{2}} + 3^{1,5})(a^{\frac{1}{2}} - 3^{1,5})} = \\
 &= \frac{3^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} - 3^{1,5}} = \frac{3^{1,5} - a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} = \\
 &= \frac{3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}(3^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} = a^{-\frac{1}{6}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 4} + \frac{2}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}} \right) \cdot \frac{1 + 2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 8a^{-\frac{2}{3}}} = \\
 &= \left[\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 4} + \frac{2}{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 2)} \right] \cdot \frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + 2)}{a^{-\frac{2}{3}}(a - 8)} = \\
 &= \frac{a^{\frac{2}{3}} + 2(a^{\frac{1}{3}} + 2)}{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{1}{3}} + 2)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + 2)}{a - 8} = \\
 &= \frac{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4}{(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4)} = (a^{\frac{1}{3}} - 2)^{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. & \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}} \right) = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \times \\
& \quad \times \left(\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})} - \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})} \right) = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})} \right) = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{2}} - b)} = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) \cdot b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})} = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. & \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \right)^4 = \\
& = \left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}{2 - 2 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{2 - 2 + \sqrt{3}} \right)^4 = \\
& \left[\begin{array}{l}
\text{а) } (2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}) = \\
= \sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^3, \text{ т.к. } 2 + \sqrt{3} = (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2; \\
\text{б) } (2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}) = \\
= \sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^3 \text{ т.к. } 2 - \sqrt{3} = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2
\end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-\left(\sqrt{2}(2+\sqrt{3}) - (\sqrt{2+\sqrt{3}})^3\right) + \sqrt{2}(2-\sqrt{3}) + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^3}{\sqrt{3}} \right)^4 = \\
&\left[\begin{array}{l} \text{а) } \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}; \\ \text{б) } \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] \\
&= \left(\frac{-\sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{6} + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 2\sqrt{2} - \sqrt{6} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\sqrt{3}} \right)^4 = \\
&= \left(\frac{-2\sqrt{6} + \frac{3\sqrt{3}+3 \cdot 3+3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}-3 \cdot 3+3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} \right)^4 = \\
&= \left(\frac{-2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 9 + 1 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} \right)^4 = \\
&= \left(\frac{-8\sqrt{3} + 12\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \right)^4 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} \right)^4 = (\sqrt{2})^4 = 4.
\end{aligned}$$

$$7. A = \frac{a^2 - a - 2 + (a-1)\sqrt{a^2-4}}{a^2 + a - 2 + (a+1)\sqrt{a^2-4}} \quad \text{при } a \geq 2.$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(a-2)(a+1) + (a-1)\sqrt{(a-2)(a+2)}}{(a+2)(a-1) + (a+1)\sqrt{(a-2)(a+2)}} = \\
&= \frac{\sqrt{a-2}((a+1)\sqrt{a-2} + (a-1)\sqrt{a+2})}{\sqrt{a+2}((a-1)\sqrt{a+2} + (a+1)\sqrt{a-2})} = \sqrt{\frac{a-2}{a+2}}.
\end{aligned}$$

$$8. A = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} \quad \text{при } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \quad \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 - 1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \right)} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2} = \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{a-b}{\sqrt{ab}} \right|.
 \end{aligned}$$

а) При $a \geq b$ $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$,

$$A = \frac{2b \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(a-b)}{a+b-a+b} = a-b,$$

б) При $a < b$ $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$,

$$A = \frac{2b \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(b-a)}{a+b+a-b} = \frac{b}{a}(b-a).$$

Итак, $A = \begin{cases} a-b & \text{при } a \geq b, \\ \frac{b}{a}(b-a) & \text{при } a < b. \end{cases}$

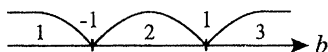
9. $A = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}$.

Упростите и вычислите при $x = \frac{2ab}{b^2+1}$, где $a > 0$, при всех значениях b .

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a + \frac{2ab}{b^2+1}} = \sqrt{\frac{a}{b^2+1} (b+1)^2} = |b+1| \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2+1}},$$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{a - \frac{2ab}{b^2+1}} = \sqrt{\frac{a}{b^2+1} (b-1)^2} = |b-1| \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2+1}}.$$

$$A = \frac{|b+1| \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2+1}} - |b-1| \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2+1}}}{|b+1| \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2+1}} + |b-1| \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2+1}}} = \frac{|b+1| - |b-1|}{|b+1| + |b-1|}.$$



$$1) \text{ При } b < -1 \quad A = \frac{-b-1+b-1}{-b-1-b+1} = \frac{1}{b};$$

$$2) \text{ При } -1 \leq b \leq 1 \quad A = \frac{b+1+b-1}{b+1-b+1} = b;$$

$$3) \text{ При } b > 1 \quad A = \frac{b+1-b+1}{b+1+b-1} = \frac{1}{b}.$$

$$\text{Итак, } A = \begin{cases} b & \text{при } |b| \leq 1, \\ \frac{1}{b} & \text{при } |b| > 1. \end{cases}$$

$$10. \quad A(z) = \frac{z+z^2}{1+\sqrt{1+z}} - \frac{z-z^2}{1-\sqrt{1-z}}.$$

Упростите и вычислите при $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{z(1+z)(\sqrt{1+z}-1)}{(1+\sqrt{1+z})(\sqrt{1+z}-1)} - \frac{z(1-z)(1+\sqrt{1-z})}{(1-\sqrt{1-z})(1+\sqrt{1-z})} = \\ &= \frac{z(1+z)(\sqrt{1+z}-1)}{1+z-1} - \frac{z(1-z)(1+\sqrt{1-z})}{1-1+z} = \\ &= (1+z)(\sqrt{1+z}-1) - (1-z)(1+\sqrt{1-z}) = \\ &= (\sqrt{1+z})^3 - 1 - z - 1 + z - (\sqrt{1-z})^3 = \\ &= (\sqrt{1+z})^3 - (\sqrt{1-z})^3 - 2. \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3 - \left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3 - 2.$$

Необходимо учесть, что

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2} = \\ &= \frac{|\sqrt{3}+1|}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} &= \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} = \\ &= \frac{|\sqrt{3} - 1|}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3 - 2 = \\ &= \frac{1}{8} \left((\sqrt{3}+1)^3 - (\sqrt{3}-1)^3 \right) - 2 = \\ &= \frac{(\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{3} \cdot 1^2 + 1^3 - (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \cdot 1 - 3\sqrt{3} \cdot 1^2 + 1^3}{8} \\ &- 2 = \frac{2 + 9 + 9}{8} - 2 = 2,5 - 2 = 0,5.\end{aligned}$$

Можно воспользоваться формулой

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+1)^3 - (\sqrt{3}-1)^3 &= \\ &= (\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1)^3 + \\ &+ 3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1) = \\ &= 8 + 12 = 20.\end{aligned}$$

Тренировочная работа 7

Упростите:

$$1. \left(\frac{y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}}{y - y^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} + z} - \frac{1 - z}{y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}} \right) : \frac{y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{5}{2}}}{y^3 - z^3} - \left(\frac{y}{z} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$2. \left(\frac{b}{b+8} - \frac{4b}{(b^{\frac{1}{3}} + 2)^3} \right) \cdot \left(\frac{1 + 2b^{-\frac{1}{3}}}{1 - 2b^{-\frac{1}{3}}} \right)^2 - \frac{24}{b+8}.$$

$$3. \frac{1}{3}c^{-1} - \left(\frac{1 - 2c^{\frac{1}{3}}}{1 + 2c^{\frac{1}{3}}} \right) : \left(\frac{4c}{(1 + 2c^{\frac{1}{3}})^3} - \frac{c}{1 + 8c} \right).$$

$$4. \left(\frac{1}{2b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}} - \frac{6}{8b^2 - 1} \right) : \frac{(2b^{\frac{2}{3}} - 1)^2}{8b^{\frac{8}{3}} - 2^{1,5} \cdot b^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{2^{1,5} \cdot b + 1}.$$

$$5. \left(\frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^3} - \frac{a}{a-1} \right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} - 1}{a^{\frac{1}{3}} + 1} \right)^2 - \frac{3}{a-1}.$$

$$6. \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}} : \left(\frac{1}{1-b} - \frac{1 - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + 1} \right).$$

$$7. \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} - y} + \frac{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} \right) : \frac{x^{\frac{1}{12}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}}.$$

$$8. \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{(y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^{-1}} + \frac{\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[6]{y} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{3(3 + x^{\frac{1}{2}})\sqrt[3]{x^{-1}}} \cdot \frac{1 - 9x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}} - 3^{-1}}.$$

$$9. A = \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}} \quad \text{при } x = \frac{2am}{b(1+m^2)}, |m| < 1.$$

$$10. A = \frac{xy - \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{y^2-1}}{xy + \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{y^2-1}} \quad \text{при } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right), \\ y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right). \end{cases}$$

Вычислите:

$$11. \frac{21 + 8\sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}.$$

$$12. \frac{11 - 6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}} + \sqrt{2}.$$

$$13. (\sqrt{3} - 1) \sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}.$$

$$14. \sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}.$$

Решение тренировочной работы 7

Упростите:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left(\frac{y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}}{y - y^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} + z} - \frac{1 - z}{y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}} \right) : \frac{y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{5}{2}}}{y^3 - z^3} - \left(\frac{y}{z} \right)^{-\frac{3}{2}} = \\
 & = \frac{\left((y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}) - (1 - z) \right) (y^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}})(y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}})}{(y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}) \cdot y^{\frac{3}{2}} (1 - y)} - \\
 & - \left(\frac{y}{z} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{(y - 1)(y^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}})}{y^{\frac{3}{2}} (1 - y)} - \frac{z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} = \frac{z^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \left(\frac{b}{b+8} - \frac{4b}{(b^{\frac{1}{3}} + 2)^3} \right) \cdot \left(\frac{1 + 2b^{-\frac{1}{3}}}{1 - 2b^{-\frac{1}{3}}} \right)^2 - \frac{24}{b+8} = \\
 & = \frac{b(b^{\frac{1}{3}} + 2)^2 - 4b(b^{\frac{2}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}} + 4)}{(b+8)(b^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \left(\frac{b^{-\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}} + 2)}{b^{-\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{3}} - 2)} \right)^2 - \frac{24}{b+8} = \\
 & = \frac{b[b^{\frac{2}{3}} + 4b^{\frac{1}{3}} + 4 - 4b^{\frac{2}{3}} + 8b^{\frac{1}{3}} - 16]}{(b+8)(b^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \cdot \frac{(b^{\frac{1}{3}} + 2)^2}{(b^{\frac{1}{3}} - 2)^2} - \frac{24}{b+8} = \\
 & = \frac{-3b(b^{\frac{1}{3}} - 2)^2(b^{\frac{1}{3}} + 2)^2}{(b+8)(b^{\frac{1}{3}} + 2)^2(b^{\frac{1}{3}} - 2)^2} - \frac{24}{b+8} = \frac{-3b}{b+8} - \frac{24}{b+8} = \\
 & = \frac{-3(b+8)}{b+8} = -3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \frac{1}{3}c^{-1} - \left(\frac{1 - 2c^{\frac{1}{3}}}{1 + 2c^{\frac{1}{3}}} \right) : \left(\frac{4c}{(1 + 2c^{\frac{1}{3}})^3} - \frac{c}{1 + 8c} \right) = \\
 & = \frac{1}{3c} - \left(\frac{1 - 2c^{\frac{1}{3}}}{1 + 2c^{\frac{1}{3}}} \right)^2 : \frac{4c(1 - 2c^{\frac{1}{3}} + 4c^{\frac{2}{3}}) - c(1 + 2c^{\frac{1}{3}})^2}{(1 + 8c)(1 + 2c^{\frac{1}{3}})^2} = \\
 & = \frac{1}{3c} - \left(\frac{1 - 2c^{\frac{1}{3}}}{1 + 2c^{\frac{1}{3}}} \right)^2 : \frac{3c(1 - 4c^{\frac{1}{3}} + 4c^{\frac{2}{3}})}{(1 + 8c)(1 + 2c^{\frac{1}{3}})^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3c} - \left(\frac{1 - 2c^{\frac{1}{3}}}{1 + 2c^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \cdot \frac{(1 + 8c)(1 + 2c^{\frac{1}{3}})^2}{3c(1 - 2c^{\frac{1}{3}})^2} = \\
&= \frac{1}{3c} - \frac{1 + 8c}{3c} = -\frac{8c}{3c} = -2\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad &\left(\frac{1}{2b^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{2}{3}}} - \frac{6}{8b^2 - 1} \right) : \frac{(2b^{\frac{2}{3}} - 1)^2}{8b^{\frac{8}{3}} - 2^{1,5} \cdot b^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{2^{1,5} \cdot b + 1} = \\
&= \frac{[4b^{\frac{4}{3}} + 2b^{\frac{2}{3}} + 1 - 6b^{\frac{2}{3}}]}{b^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{2}{3}} - 1)(4b^{\frac{4}{3}} + 2b^{\frac{2}{3}} + 1)} \times \\
&\quad \times \frac{2^{1,5} \cdot b^{\frac{5}{3}}(2^{1,5} \cdot b - 1)}{(2b^{\frac{2}{3}} - 1)^2} + \frac{1}{2^{1,5} \cdot b + 1} = \\
&= \frac{2^{1,5} \cdot b(2^{1,5} \cdot b - 1)}{8b^2 - 1} + \frac{1}{2^{1,5} \cdot b + 1} = \\
&= \frac{2^{1,5} \cdot b(2^{1,5} \cdot b - 1) + (2^{1,5} \cdot b - 1)}{(2^{1,5} \cdot b - 1)(2^{1,5} \cdot b + 1)} = \\
&= \frac{(2^{1,5} \cdot b - 1)(2^{1,5} \cdot b + 1)}{(2^{1,5} \cdot b - 1)(2^{1,5} \cdot b + 1)} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad &\left(\frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^3} - \frac{a}{a - 1} \right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} - 1}{a^{\frac{1}{3}} + 1} \right)^2 - \frac{3}{a - 1} = \\
&= \frac{4a(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1) - a(a^{\frac{1}{3}} - 1)^2}{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^3 \cdot (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1)} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^2}{(a^{\frac{1}{3}} + 1)^2} - \frac{3}{a - 1} = \\
&= \frac{a(4a^{\frac{2}{3}} + 4a^{\frac{1}{3}} + 4 - a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} - 1)}{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^3 \cdot (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1)} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^2}{(a^{\frac{1}{3}} + 1)^2} - \frac{3}{a - 1} = \\
&= \frac{3a(a^{\frac{1}{3}} + 1)^2(a^{\frac{1}{3}} - 1)^2}{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^3(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1)(a^{\frac{1}{3}} + 1)^2} - \frac{3}{a - 1} = \\
&= \frac{3a}{a - 1} - \frac{3}{a - 1} = \frac{3(a - 1)}{a - 1} = 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}} : \left(\frac{1}{1-b} - \frac{1-b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + 1} \right) = \\
 & = \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}} : \frac{1 - (1-b^{\frac{1}{3}})^2}{(1-b^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + 1)} = \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1-b}{b^{\frac{1}{3}}(2-b^{\frac{1}{3}})} = \\
 & = \frac{1-b}{(b^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}})b^{\frac{1}{6}}(2-b^{\frac{1}{3}})} = \frac{1-b}{(1+b^{\frac{1}{2}})(2-b^{\frac{1}{3}})} = \\
 & = \frac{(1-b^{\frac{1}{2}})(1+b^{\frac{1}{2}})}{(1+b^{\frac{1}{2}})(2-b^{\frac{1}{3}})} = \frac{1-b^{\frac{1}{2}}}{2-b^{\frac{1}{3}}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} - y} + \frac{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} \right) : \frac{x^{\frac{1}{12}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{y^{\frac{2}{3}} + (x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{6}} - y^{\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{1}{6}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})} \cdot \frac{(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}})y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{12}}} + \frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} - y} \cdot \frac{(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{2}})y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{12}}} + \frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}} = y^{\frac{1}{3}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{(y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^{-1}} + \frac{\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[6]{y} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{3(3+x^{\frac{1}{2}})\sqrt[3]{x^{-1}}} \cdot \frac{1-9x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}} - 3^{-1}} = \\
 & = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}(y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) + \frac{x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1} \cdot y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \cdot (x-9)}{3(3+x^{\frac{1}{2}}) \cdot (x^{-\frac{1}{2}} - 3^{-1})} = \\
 & = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) + \frac{y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 3)}{(-3^{-1} + x^{-\frac{1}{2}})3x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 3)}{3 - x^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} - \frac{y^{\frac{1}{2}}(3 - x^{\frac{1}{2}})}{3 - x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$9. A = \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}; \quad x = \frac{2am}{b(1+m^2)}; \quad |m| < 1.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a+bx} &= \sqrt{a + \frac{2abm}{b(1+m^2)}} = \sqrt{a + \frac{2am}{1+m^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a+am^2+2am}{1+m^2}} = \sqrt{\frac{a(1+m)^2}{1+m^2}} = |1+m| \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} = \\ &= (1+m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{аналогично } \sqrt{a-bx} = (1-m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}},$$

так как $-1 < m < 1$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1+m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} + (1-m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}}}{(1+m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} - (1-m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}}} = \\ &= \frac{(1+m) + (1-m)}{(1+m) - (1-m)} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

$$10. A = \frac{xy - \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{y^2-1}}{xy + \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{y^2-1}};$$

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right); \quad y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4a^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{a} \right)^2} = \frac{1}{2} \left| a - \frac{1}{a} \right|; \\ \sqrt{y^2-1} &= \frac{1}{2} \left| b - \frac{1}{b} \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{4} \left|a - \frac{1}{a}\right| \cdot \left|b - \frac{1}{b}\right|}{\frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4} \left|a - \frac{1}{a}\right| \cdot \left|b - \frac{1}{b}\right|} = \\
 &= \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) - \left|a - \frac{1}{a}\right| \cdot \left|b - \frac{1}{b}\right|}{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left|a - \frac{1}{a}\right| \cdot \left|b - \frac{1}{b}\right|} = \\
 &= \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) - \left|\frac{a^2-1}{a}\right| \cdot \left|\frac{b^2-1}{b}\right|}{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left|\frac{a^2-1}{a}\right| \cdot \left|\frac{b^2-1}{b}\right|}.
 \end{aligned}$$

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{a^2-1}{a} \geq 0, \\ \frac{b^2-1}{b} \geq 0; \end{cases} \quad 4 \left\{ \begin{array}{l} \text{График для } a: \text{ параболы } y = \frac{a^2-1}{a} \text{ с нулями в } -1, 0, 1. \text{ Заштрихованы } (-1, 0) \text{ и } (1, \infty). \\ \text{График для } b: \text{ параболы } y = \frac{b^2-1}{b} \text{ с нулями в } -1, 0, 1. \text{ Заштрихованы } (-1, 0) \text{ и } (1, \infty). \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{a^2-1}{a}\right) \cdot \left(\frac{b^2-1}{b}\right)}{\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a^2-1}{a}\right) \cdot \left(\frac{b^2-1}{b}\right)} = \\
 &= \frac{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab} - \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}}{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab} + \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}} = \\
 &= \frac{(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1)}{(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) + (a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1)} = \\
 &= \frac{2a^2 + 2b^2}{2a^2b^2 + 2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2 + 1},
 \end{aligned}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{a^2-1}{a} < 0, \\ \frac{b^2-1}{b} < 0; \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График для } a: \text{ параболы } y = \frac{a^2-1}{a} \text{ с нулями в } -1, 0, 1. \text{ Заштрихованы } (-\infty, -1) \text{ и } (0, 1). \\ \text{График для } b: \text{ параболы } y = \frac{b^2-1}{b} \text{ с нулями в } -1, 0, 1. \text{ Заштрихованы } (-\infty, -1) \text{ и } (0, 1). \end{array} \right.$$

$$A = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2 + 1};$$

⁴ В данном случае и далее символ $\{$ нужно понимать как пересечение решений.

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{a^2 - 1}{a} \geq 0, \\ \frac{b^2 - 1}{b} < 0; \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График для } a: \text{ штриховка на } (-1; 0) \cup [1; \infty) \\ \text{График для } b: \text{ штриховка на } (-\infty; -1) \cup (0; 1) \end{array} \right.$$

$$A = \frac{a^2 b^2 + 1}{a^2 + b^2};$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{a^2 - 1}{a} < 0, \\ \frac{b^2 - 1}{b} \geq 0; \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График для } a: \text{ штриховка на } (-\infty; -1) \cup (0; 1) \\ \text{График для } b: \text{ штриховка на } (-1; 0) \cup [1; \infty) \end{array} \right.$$

$$A = \frac{a^2 b^2 + 1}{a^2 + b^2}.$$

Ответ:

$$1) A = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 + 1}, \text{ если}$$

$$\begin{cases} a \in [-1; 0) \cup [1; \infty), \\ b \in [-1; 0) \cup [1; \infty) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1), \\ b \in (-\infty; -1) \cup (0; 1). \end{cases}$$

$$2) A = \frac{a^2 b^2 + 1}{a^2 + b^2}, \text{ если}$$

$$\begin{cases} a \in [-1; 0) \cup [1; \infty), \\ b \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1), \\ b \in [-1; 0) \cup [1; \infty). \end{cases}$$

Вычислите:

$$\begin{aligned}
 11. \quad & \frac{21 + 8\sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \\
 & = \frac{(4 + \sqrt{5})^2}{4 + \sqrt{5}} \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = (4 + \sqrt{5}) \cdot |2 - \sqrt{5}| - \sqrt{5} = \\
 & = (4 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2) - \sqrt{5} = \\
 & = 4\sqrt{5} - 8 + 5 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad \frac{11 - 6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}} + \sqrt{2} &= \frac{(3 - \sqrt{2})^2}{\sqrt[3]{(3 - \sqrt{2})^3}} + \sqrt{2} = \\
 &= \frac{(3 - \sqrt{2})^2}{(3 - \sqrt{2})} + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad (\sqrt{3} - 1)\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} &= \\
 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{(\sqrt{3} + 1)^3}} = \\
 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} + 1)} = \\
 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = (\sqrt{3} - 1)|\sqrt{3} + 1| = \\
 &= (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2,
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3} + 1)^3 &= (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 1^2 + 1^3 = \\
 &= 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1 = 10 + 6\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

А если не предвидеть? Попробуем иначе.

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & \text{при } a \geq 0; b \geq 0, \\ -\sqrt{a^2b} & \text{при } a < 0; b \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{3} - 1 > 0.$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3} - 1)\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} &= \\
 &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 \left(\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \right)} = \\
 &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1) \left(\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1)\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \right)} = \\
 &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1) \left(\sqrt{3}(3 - 1) + \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3(10 + 6\sqrt{3})} \right)},
 \end{aligned}$$

так как

$$(\sqrt{3} - 1)^3 = 3\sqrt{3} - 3(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} \cdot 1 - 1 = 6\sqrt{3} - 10;$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(\sqrt{3}-1)\left(2\sqrt{3} + \sqrt[3]{(6\sqrt{3}-10)(10+6\sqrt{3})}\right)} = \\
& = \sqrt{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3} + \sqrt[3]{-100+36\cdot 3})} = \\
& = \sqrt{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3} + \sqrt[3]{8})} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+2)} = \\
& = \sqrt{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2(3-1)} = 2.
\end{aligned}$$

14. $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}} =$
 $= \sqrt[3]{(\sqrt{3}+3)^3} + \sqrt[3]{(3-\sqrt{3})^3} = \sqrt{3} + 3 + 3 - \sqrt{3} = 6,$
 так как $(\sqrt{3}+3)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2\sqrt{3} + 3 \cdot 3(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 =$
 $= 27 + 27\sqrt{3} + 27 + 3\sqrt{3} = 54 + 30\sqrt{3};$
 $(3-\sqrt{3})^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2\sqrt{3} + 3 \cdot 3(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 =$
 $= 27 - 27\sqrt{3} + 27 - 3\sqrt{3} = 54 - 30\sqrt{3}.$

Но ведь этого можно и не увидеть, как же быть тогда?
 Попробуем другим способом.

Пусть $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} = a;$ $\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}} = b.$

Тогда $54+30\sqrt{3} = a^3,$ $54-30\sqrt{3} = b^3,$ $a^3+b^3 = 108.$

При этом

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)\left((a+b)^2 - 3ab\right),$$

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= \sqrt[3]{(54+30\sqrt{3}) \cdot (54-30\sqrt{3})} = \\
&= \sqrt[3]{54^2 - 900 \cdot 3} = \sqrt[3]{2916 - 2700} = \sqrt[3]{216} = 6.
\end{aligned}$$

Тогда $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left((a+b)^2-18\right)=108.$

Если положить $a+b=t,$ то имеем $t^3-18t-108=0.$

Сгруппировав, разложим на множители:

$$t^3 - 36t + 18t - 108 = 0, \quad t(t^2 - 36) + 18(t - 6) = 0;$$

$$(t-6)(t(t+6)+18) = 0, \quad (t-6)(t^2+6t+18) = 0;$$

$$\begin{cases} t-6=0 \\ (t+3)^2+9=0 \end{cases} \iff t=6.$$

Итак, $a+b=6,$ то есть $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}} = 6.$

5

Карточки заданий

Подготовительные карточки

Карточка 1

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^4}}}{x^{-\frac{7}{30}}}$.

2. Вычислите $\sqrt[3]{54 \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} - 81^{\frac{1}{4}} (0,3)^0 + \sqrt[3]{42\frac{7}{8}} - 0,5^2 : 2$

3. Упростите $\frac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-3} + x^{-3}} : \left(\frac{xa^{-2} + ax^{-2}}{x - a}\right)^{-1}$.

4. Вычислите $(5 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-2}) : 2^{n-5} + 5^{2n+1} : 25^{n-1}$.

Карточка 2

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[7]{x^2 \sqrt{x^{\frac{1}{3}}}}}{x^{-\frac{4}{21}}}$.

2. Вычислите

$$\sqrt[3]{256 \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \cdot 2 + 16^{\frac{3}{2}} (0,8)^0 - 0,2^3 \cdot 0,2^{-4} - \sqrt[5]{7 \frac{19}{32}}.$$

3. Упростите $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right) (a+x+1)^{-2}$.

4. Вычислите $\frac{52(3 \cdot 4^{10} + 7 \cdot 2^{19})}{(13 \cdot 16^3)^2}$.

Карточка 3

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2}} \cdot \sqrt[4]{x \sqrt{x}}}{x^{-\frac{5}{24}}}$.

2. Вычислите

$$(-1)^{21} - \sqrt[4]{81^3} + \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^6 - 16^{\frac{5}{4}} (0,5)^0 + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}.$$

3. Упростите $\frac{a^{\frac{5}{4}} - a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} : \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}} + 1$.

4. Вычислите $(2 \cdot 5^{2n-1} - 3 \cdot 25^{n-1}) : 5^{2n-2} + 16^{10} : 8^{13}$.

Карточка 4

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{8}{15}}}$.

2. Вычислите

$$(0,04)^{-1,5} \cdot \sqrt[3]{(0,125)^{-1}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} (-0,4)^0 + \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right)^{-0,25}$$

3. Вычислите $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

4. Вычислите $\left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$

при $a = 0,125$; $b = 0,008$.

Карточка 5

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[3]{x^2 \sqrt[5]{x}}}{x^{-\frac{4}{15}}}$.

2. Вычислите $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} - 125^{\frac{2}{3}} (0,4)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

3. Вычислите $\left(\frac{a^{-1} + 2a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} + 1\right)^{-1} \cdot \left(1 - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

при $a = 9$.

4. Вычислите $\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}} + 7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}} + 6\sqrt[3]{375}}$.

Карточка 6

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[7]{x\sqrt{x^{-0,5}}}}{x^{\frac{5}{14}} \cdot \sqrt[4]{x^{-1}}}$.

2. Вычислите $(0,5)^{-4} + 16^{0,5} - \sqrt[4]{(0,0625)^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5} + 0,3^0$.

3. Вычислите $\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} - 2}{b^{-1} - 1} - 2\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

при $b = 0,04$.

4. Вычислите $\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}} + 15\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$.

Карточка 7

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{1}{15}}}$.

2. Вычислите $(0,04)^{-1,5} \cdot \sqrt[3]{(0,125)^{-1}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

3. Вычислите $\left(\frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[4]{9}} - 1\right) \frac{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})^2 - 2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}}$.

4. Вычислите $\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}} - 1}\right)^{-1} + a^{\frac{1}{3}}$ при $a = 0,008$.

Карточка 8

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[6]{y^5} \sqrt[3]{y}}{y^{-\frac{1}{9}}}$.
2. Вычислите $\sqrt[4]{81^3} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} + 144^{0,5} (-10)^0$.
3. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{4 + 2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \right) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$.
4. Вычислите $\left(\frac{c^{-\frac{1}{2}} - c^{-\frac{3}{4}}}{1 - c^{-\frac{1}{2}}} \right)^{-1} - c^{\frac{1}{4}}$ при $c = \frac{4}{9}$.

Карточка 9

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[4]{a^5} \sqrt[3]{a^{-2}}}{a^{-\frac{5}{24}}}$.
2. Вычислите $(0,36)^{-0,5} \sqrt[4]{(0,0001)^{-1}} + (-1)^{12} \left(\frac{4}{3} \right)^{-3} (0,75)^{-4} - 0,5^0$.
3. Вычислите $5 \sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3 \sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11 \sqrt[6]{18} + 2 \sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.
4. Вычислите $\frac{y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}}{(y^2 - yz)^{\frac{2}{3}}} : \frac{\sqrt[3]{y^{-1} - zy^{-2}}}{y\sqrt{y} - z\sqrt{z}} - yz$
при $y = \frac{12}{13}$; $z = \frac{5}{13}$.

Карточка 10

1. Представьте в виде степени $\frac{z^{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{z \sqrt[4]{z}}}{z^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{z \sqrt[4]{z}}}$.

2. Вычислите $\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}}$.

3. Вычислите $\sqrt[6]{17\sqrt{5} + 38} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

4. Вычислите $\frac{1 - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}} - \frac{z - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{z^{\frac{3}{2}}}$ при $z = 2,25$.

Карточка 11

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[6]{a^2 \sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt{a \sqrt[9]{a^2}}}$.

2. Вычислите $\left(\frac{16}{\sqrt{5} - 1} - \frac{5}{\sqrt{3} + 2} - \frac{8}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \right) (\sqrt{3} + 6)$.

3. Вычислите $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}}$.

4. Вычислите $\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}} - \frac{\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab} \right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}}}$

при $a = -0,125$; $b = -8$.

Карточка 12

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[4]{a \sqrt[4]{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}}}{\sqrt{a \sqrt[3]{a^{-2}}} : a^{-\frac{1}{6}}}$.

2. Вычислите $\frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2} + 1} - (11 - 5\sqrt{5}) (2 + \sqrt{5})$.

3. Вычислите $\sqrt{98\sqrt{48}} - 11\sqrt[4]{12} - 3\sqrt{10\sqrt{75}} + 2\sqrt{12\sqrt{108}}$.

4. Вычислите $\left((x^2 + y^2) \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} + (x^2 y^2)^{\frac{1}{3}} \right) \frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right)^{-1}}$

при $x = \sqrt[4]{27}$; $y = \sqrt[4]{125}$.

Решение подготовительных карточек

Решение подготовительной карточки 1

1. Представьте в виде степени

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^4}}}{x^{-\frac{7}{30}}} &= \left(x^2 \cdot x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{7}{30}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{4}{15}} \cdot x^{\frac{7}{30}} = \\ &= x^{\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{7}{30}} = \boxed{x^{0,9}}. \end{aligned}$$

2. Вычислите $\sqrt[3]{54 \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} - 81^{\frac{1}{4}} (0,3)^0 + \sqrt[3]{42 \frac{7}{8}} - 0,5^2 : 2 =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{2 \cdot 27 \cdot 2^5} - (3^4)^{\frac{1}{4}} \cdot 1 + \sqrt[3]{\frac{343}{8}} - 0,5^2 \cdot 2^{-1} = \\ &= \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} - 3 + \sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}\right)^3} - (2^{-1})^2 \cdot 2^{-1} = \\ &= 2^2 \cdot 3 - 3 + \frac{7}{2} - \frac{1}{8} = \boxed{12,375} \quad \left(\frac{1}{8} = 0,125\right). \end{aligned}$$

3. Упростите $\frac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-3} + x^{-3}} : \left(\frac{xa^{-2} + ax^{-2}}{x - a}\right)^{-1} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a^{-1} - x^{-1})(x - a)^{-1}}{(a^{-3} + x^{-3})(xa(a^{-3} + x^{-3}))^{-1}} = \\ &= \frac{(a^{-1} - x^{-1})xa(x^{-3} + a^{-3})}{(a^{-3} + x^{-3})(x - a)} = \frac{x^{-1}a^{-1}xa(x - a)}{x - a} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

4. $(5 \cdot 2^{n-3} - 2^{n-2}) : 2^{n-5} + 5^{2n+1} : 25^{n-1} =$

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot 2^{n-3} : 2^{n-5} - 2^{n-2} : 2^{n-5} + 5^{2n+1} : (5^2)^{n-1} = \\ &= 5 \cdot 2^{n-3-n+5} - 2^{n-2-n+5} + 5^{2n+1-2n+2} = \\ &= 5 \cdot 2^2 - 2^3 + 5^3 = 20 - 8 + 125 = \boxed{137}. \end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 2

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Представьте в виде степени } \frac{\sqrt[7]{x^2 \sqrt{x^{\frac{1}{3}}}}}{x^{-\frac{4}{21}}} &= \\
 = x^{\frac{2}{7}} \left(\left(x^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{7}} \cdot x^{-\left(-\frac{4}{21}\right)} &= x^{\frac{2}{7} + \frac{1}{42} + \frac{4}{21}} = \boxed{x^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

2. Вычислите

$$\begin{aligned}
 &\sqrt[3]{256 \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \cdot 2 + 16^{\frac{3}{2}} (0,8)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 0,2^{-4} - \sqrt[5]{7 \frac{19}{32}} = \\
 &= \sqrt[3]{2^8 \cdot 2 \cdot 3^3} + (2^4)^{\frac{3}{2}} \cdot 1 - (5^{-1})^3 \cdot (5^{-1})^{-4} - \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \\
 &= \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^3} + 2^6 - 5^{-3+4} - \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = 2^3 \cdot 3 + 2^6 - 5 - \frac{3}{2} = \boxed{81,5}.
 \end{aligned}$$

3. Упростите

$$\begin{aligned}
 &\frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right) (a+x+1)^{-2} = \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{a+x}}{1 - \frac{1}{a+x}} \cdot \frac{2ax - 1 + a^2 + x^2}{2ax} \cdot \frac{1}{(a+x+1)^2} = \\
 &= \frac{a+x+1}{a+x-1} \cdot \frac{(a+x)^2 - 1}{2ax} \cdot \frac{1}{(a+x+1)^2} = \\
 &= \frac{(a+x+1)(a+x+1)(a+x-1)}{(a+x-1) \cdot 2ax (a+x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{2ax}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \frac{52(3 \cdot 4^{10} + 7 \cdot 2^{19})}{(16^3 \cdot 13)^2} &= \frac{52(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19})}{((2^4)^3 \cdot 13)^2} = \\
 &= \frac{13 \cdot 2^2 \cdot 2^{19} (3 \cdot 2 + 7)}{2^{24} \cdot 13^2} = \frac{13^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{19}}{2^{24} \cdot 13^2} = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}.
 \end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 3

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[4]{x\sqrt{x}}}{x^{-\frac{5}{24}}} = \left(x \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{5}{24}} =$$

$$= x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \boxed{x}.$$

2. Вычислите

$$(-1)^{21} - \sqrt[4]{81^3} + \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^6 - 16^{\frac{5}{4}} (0,5)^0 + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} =$$

$$= -1 - \left((3^4)^3\right)^{\frac{1}{4}} + \left(2^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\right)^6 - (2^4)^{\frac{5}{4}} \cdot 1 + (-2^{-2})^{-3} =$$

$$= -1 - 3^3 + 2^{4+3} - 2^5 - 2^6 = -1 - 27 + 128 - 32 - 64 = \boxed{4}.$$

3. Упростите $\frac{a^{\frac{5}{4}} - a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} : \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}} + 1 =$

$$= \frac{a^{\frac{1}{4}}(a-1)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)} \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+1} + 1 =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)} + 1 =$$

$$= a^{\frac{1}{2}} - 1 + 1 = \boxed{a^{\frac{1}{2}}}.$$

4. $(2 \cdot 5^{2n-1} - 3 \cdot 25^{n-1}) : 5^{2n-2} + 16^{10} : 8^{13} =$

$$= 2 \cdot 5^{2n-1} : 5^{2n-2} - 3 \cdot 25^{n-1} : 5^{2n-2} + (2^4)^{10} : (2^3)^{13} =$$

$$= 2 \cdot 5^{2n-1-2n+2} - 3 \cdot 5^{2(n-1)-2n+2} + 2^{40} : 2^{39} = 2 \cdot 5^{-1} - 3 \cdot 5^0 + 2 = \boxed{9}.$$

Решение подготовительной карточки 4

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{8}{15}}} = \left(x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{-\left(-\frac{8}{15}\right)} = x^{\frac{2}{5} + \frac{1}{15} + \frac{8}{15}} = \boxed{x}.$$

2. Вычислите

$$\begin{aligned} (0,04)^{-1,5} \cdot \sqrt[3]{(0,125)^{-1}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} (-0,4)^0 + \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right)^{-0,25} &= \\ = (0,2)^{2(-1,5)} \cdot \sqrt[3]{(0,5)^{3(-1)}} - (11^{-2})^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 + \left(\frac{6}{5}\right)^{-4(-0,25)} &= \\ = (5^{-1})^{-3} \cdot \sqrt[3]{(2^{-1})^{-3}} - 11 + \left(\frac{6}{5}\right)^1 &= \\ = 5^3 \cdot 2 - 11 + 1,2 = \boxed{240,2}. \end{aligned}$$

3. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} =$

$$\begin{aligned} &\left[\text{Допустим, что } 5\sqrt{2} \leq 7; \quad 50 \leq 49 - \text{ложь, значит } 5\sqrt{2} > 7. \right] \\ &= \sqrt[6]{(5\sqrt{2}-7)^2} \cdot \sqrt[6]{(3+2\sqrt{2})^3} = \\ &= \sqrt[6]{(25 \cdot 2 - 70\sqrt{2} + 49) (3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2 + (2\sqrt{2})^3)} = \\ &= \sqrt[6]{(99 - 70\sqrt{2})(27 + 54\sqrt{2} + 72 + 16\sqrt{2})} = \\ &= \sqrt[6]{(99 - 70\sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2})} = \sqrt[6]{99^2 - (70\sqrt{2})^2} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

Можно несколько проще, если увидеть, что

$$3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \cdot 1 + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2,$$

$$\text{тогда } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1,$$

$$\text{значит } \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \cdot (\sqrt{2} + 1) = \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)(\sqrt{2}+1)^3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7) \left((\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3 \right)} = \\
&= \sqrt[3]{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)} = \sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} = \boxed{1}.
\end{aligned}$$

Еще проще, если догадаться, что $5\sqrt{2}-7 = (\sqrt{2}-1)^3$, тогда $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} \cdot \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = \boxed{1}$.

$$4. \left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} \right)^{-1}$$

при $a = 0,125$; $b = 0,008$.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} \right)^{-1} = \\
&= \frac{a^{-\frac{1}{3}} \left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}} \right)}{\left(a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}} \right) \left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}} \right)} = \\
&= \frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}} - b^{-\frac{1}{3}}} = A(a; b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(0,125; 0,008) &= \frac{(0,125)^{-\frac{1}{3}}}{(0,125)^{-\frac{1}{3}} - (0,008)^{-\frac{1}{3}}} = \\
&= \frac{(2^{-3})^{-\frac{1}{3}}}{(2^{-3})^{-\frac{1}{3}} - (5^{-3})^{-\frac{1}{3}}} = \frac{2}{2-5} = \boxed{-\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 5

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 \sqrt[5]{x}}}{x^{-\frac{4}{15}}} = \frac{\left(x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{4}{15}}} =$$

$$= x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{15}} \cdot x^{-\left(-\frac{4}{15}\right)} = x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \boxed{x}.$$

2. Вычислите

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} - 125^{\frac{2}{3}} (0,4)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} - (5^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 1 + (5^{-1})^{-2} : (5^{-1})^{-1} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} - 5^2 + 5^2 : 5^1 = 2 - 25 + 5 = \boxed{-18}.$$

$$3. \left(\frac{a^{-1} + 2a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} + 1\right)^{-1} \cdot \left(1 - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

при $a = 9$.

$$\left(\frac{a^{-1} + 2a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} + 1\right)^{-1} \cdot \left(1 - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}} + 1\right)^2}{a^{-\frac{1}{2}}(a^{-1} - 1)} + 1\right)^{-1} \cdot \frac{1}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}} + 1\right)^2 a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{-\frac{1}{2}} + 1\right)\left(a^{-\frac{1}{2}} - 1\right)} + 1\right)^{-1} \cdot \frac{1}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) a^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} - 1} + 1 \right)^{-1} \cdot \frac{1}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} = \\
&= \left(\frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} - 1}{a^{-\frac{1}{2}} - 1} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{a^{-\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{1 - a^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}(a+1)} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}}{1+a} = A(a);
\end{aligned}$$

$$A(9) = \frac{-9^{\frac{1}{2}}}{1+9} = -\frac{3}{10} = \boxed{-0,3}.$$

$$\begin{aligned}
4. \quad &\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}} + 7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}} + 6\sqrt[3]{375}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 64} + 7\sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3} + 6\sqrt[3]{5^3 \cdot 3}} = \\
&= \frac{5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \left((2^6)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} + 7 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} + 6 \cdot 5 \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \\
&= \frac{5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 7 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{9}}}{\left(3^{\frac{1}{3}}(24 + 30)\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{9}} + 7 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{10}{9}}}{3^{\frac{1}{9}}(2 \cdot 27)^{\frac{1}{3}}} = \\
&= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{9}}(5 \cdot 2 + 7 \cdot 3)}{3^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3} = \frac{31}{3} = \boxed{10\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 6

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[7]{x\sqrt{x^{-0,5}}}}{x^{\frac{5}{14}} \cdot \sqrt[4]{x^{-1}}} = \frac{x^{\frac{1}{7}} \cdot x^{-0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}}}{x^{\frac{5}{14}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{7} - \frac{1}{28} - \frac{5}{14} + \frac{1}{4}} = x^0 = \boxed{1}.$$

2. Вычислите

$$\begin{aligned} (0,5)^{-4} + 16^{0,5} - \sqrt[4]{(0,0625)^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5} + 0,3^0 &= \\ = (2^{-1})^{-4} + (2^4)^{0,5} - \left(\left((0,5)^4\right)^{-3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-0,5} + 1 &= \\ = 2^4 + 2^2 - (2^{-1})^{-3} \cdot \frac{3}{2} + 1 = 16 + 4 - 2^2 \cdot 3 + 1 &= \boxed{9}. \end{aligned}$$

3. $\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} - 2}{b^{-1} - 1} - 2\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ при $b = 0,04$.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} - 2}{b^{-1} - 1} - 2\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{b^{-\frac{3}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} - 2 - 2b^{-1} + 2}{b^{-1} - 1}\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{b^{-\frac{3}{2}} - 2b^{-1} + b^{-\frac{1}{2}}}{b^{-1} - 1}\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-1} - 2b^{-\frac{1}{2}} + 1\right)}{b^{-1} - 1}\right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right)^2}{\left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(b^{-\frac{1}{2}} + 1 \right)} \right)^{-1} \left(1 + b^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \\
&= \left(\frac{b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \left(1 + b^{-\frac{1}{2}} \right)}{b^{-\frac{1}{2}} + 1} \right)^{-1} = \\
&= \left(b^{-\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right)^{-1} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}} - 1} = \\
&= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}} \left(1 - b^{\frac{1}{2}} \right)} = \frac{b}{1 - b^{\frac{1}{2}}} = A(b);
\end{aligned}$$

$$A(0,04) = \frac{0,04}{1 - (0,04)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0,04}{1 - 0,2} = \frac{0,04}{0,8} = \frac{4}{80} = \boxed{0,05}.$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54} + 15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}} = \frac{\left(7(2 \cdot 27)^{\frac{1}{3}} + 15 \cdot (2^7)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot 3^4)^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}} = \\
&= \frac{\left(7 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} + 15 \cdot 2^{\frac{7}{3}} \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} + 2^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(2^{\frac{1}{3}} (7 \cdot 3 + 15 \cdot 2^2) \right)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}} \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3 \right)} = \\
&= \frac{2^{\frac{1}{12}} (7 \cdot 3 + 15 \cdot 4)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}} (2 + 3)} = \frac{81^{\frac{1}{4}}}{5} = \frac{3}{5} = \boxed{0,6}.
\end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 7

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x^{\frac{2}{3}}}}}{x^{-\frac{1}{15}}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^{-\left(-\frac{1}{15}\right)} = x^{\frac{2}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}} = \boxed{x^{\frac{8}{15}}}.$$

$$2. \text{ Вычислите } (0,04)^{-1,5} \cdot \sqrt[3]{(0,125)^{-1}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (0,2)^{2(-1,5)} \cdot \left((2^{-3})^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} - (11^{-2})^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (5^{-1})^{-3} \cdot 2 - 11 = 250 - 11 = \boxed{239}.$$

$$3. \left(\frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[4]{9}} - 1\right) \frac{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})^2 - 2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 1\right) \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{6} + \sqrt{3} - 2\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 - 3}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}.$$

$$4. \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}} - 1}\right)^{-1} + a^{\frac{1}{3}} \text{ при } a = 0,008.$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1}}{a^{-\frac{4}{3}} - 1}\right)^{-1} + a^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a^{-\frac{2}{3}})}{(a^{-\frac{2}{3}} + 1)(a^{-\frac{2}{3}} - 1)}\right)^{-1} + a^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}} - 1}\right)^{-1} + a^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}} - 1}{a^{-\frac{1}{3}}} + a^{\frac{1}{3}} =$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \left(a^{-\frac{2}{3}} - 1\right) + a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} - a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} = A(a);$$

$$A(0,008) = (0,008)^{-\frac{1}{3}} = (0,2^3)^{-\frac{1}{3}} = 0,2^{-1} = \boxed{5}.$$

Решение подготовительной карточки 8

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[6]{y^5 \sqrt[3]{y}}}{y^{-\frac{1}{9}}} = \left(y^5 \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot y^{-\left(-\frac{1}{9}\right)} = y^{\frac{16}{3}} \cdot \frac{1}{6} \cdot y^{\frac{1}{9}} = y^{\frac{8}{9}} + \frac{1}{9} = \boxed{y}.$$

2. Вычислите

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{81^3} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} + 144^{0,5} (-10)^0 = \\ & = (3^{4 \cdot 3})^{\frac{1}{4}} \cdot (2^5)^{-0,4} - (2^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{3}} + (12^2)^{0,5} \cdot 1 = \\ & = 3^3 \cdot 2^{-2} - 2^{-2} \cdot 3 + 12 = 2^{-2}(27 - 3) + 12 = 2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3 + 12 = \boxed{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \left(\frac{\sqrt{3}+2}{4+2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2(2+\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \\ & = \frac{1-\sqrt{3}+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} = \frac{3-1}{2} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. & \left(\frac{c^{-\frac{1}{2}} - c^{-\frac{3}{4}}}{1 - c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1} - c^{\frac{1}{4}} \text{ при } c = \frac{4}{9} \\ & \left(\frac{c^{-\frac{1}{2}} - c^{-\frac{3}{4}}}{1 - c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-1} - c^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{c^{-\frac{1}{2}}(1 - c^{-\frac{1}{4}})}{(1 - c^{-\frac{1}{4}})(1 + c^{-\frac{1}{4}})}\right)^{-1} - c^{\frac{1}{4}} = \\ & = \left(\frac{c^{-\frac{1}{2}}}{1 + c^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-1} - c^{\frac{1}{4}} = \frac{1 + c^{-\frac{1}{4}}}{c^{-\frac{1}{2}}} - c^{\frac{1}{4}} = c^{\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-\frac{1}{4}}\right) - c^{\frac{1}{4}} = \\ & = c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}} - c^{\frac{1}{4}} = c^{\frac{1}{2}} = A(c); \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Решение подготовительной карточки 9

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[4]{a^5 \sqrt[3]{a^{-2}}}}{a^{-\frac{5}{24}}} = \frac{\left(a^5 \cdot a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{-\frac{5}{24}}} = a^{\frac{5}{4}} \cdot a^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} \cdot a^{-\left(-\frac{5}{24}\right)} =$$

$$= a^{\frac{5}{4} - \frac{1}{6} + \frac{5}{24}} = \boxed{a^{\frac{7}{24}}}.$$

2. Вычислите

$$(0,36)^{-0,5} \sqrt[4]{(0,0001)^{-1}} + (-1)^{12} \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} (0,75)^{-4} - 0,5^0 =$$

$$= \left((0,6)^2\right)^{-0,5} \left(\left((0,1)^4\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} - 1 =$$

$$= \frac{10}{6} (10^{-1})^{-1} + \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1 =$$

$$= \frac{50}{3} + \frac{4}{3} - 1 = 18 - 1 = \boxed{17}.$$

3. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 11\sqrt[6]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}} =$

$$= 5 \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot 32^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} - 3 \cdot 9^{\frac{1}{3}} (2 \cdot 81)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} -$$

$$- 11 \cdot 18^{\frac{1}{6}} + 2(3 \cdot 25)^{\frac{1}{3}} \cdot 50^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} - 3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{4}{6}} - 11 \cdot 3^{\frac{2}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{6}} =$$

$$= 5 \cdot 2^{\frac{7}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} - 3^{1+\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{1}{6}} - 11 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} - 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} - 11 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} + 10 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = \boxed{0}.$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & \frac{y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}}{(y^2 - yz)^{\frac{2}{3}}} : \frac{\sqrt[3]{y^{-1} - zy^{-2}}}{y\sqrt{y} - z\sqrt{z}} - yz \text{ при } y = \frac{12}{13}; z = \frac{5}{13}. \\
& \frac{y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}}{(y^2 - yz)^{\frac{2}{3}}} : \frac{\sqrt[3]{y^{-1} - zy^{-2}}}{y\sqrt{y} - z\sqrt{z}} - yz = \\
& = \frac{y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{2}{3}}(y-z)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{3}{2}}}{(y^{-2}(y-z))^{\frac{1}{3}}} - yz = \\
& = \frac{y^3 - z^3}{y^{\frac{2}{3}}(y-z)^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{2}{3}}(y-z)^{\frac{1}{3}}} - yz = \\
& = \frac{y^3 - z^3}{(y-z)} - yz = y^2 + zy + z^2 - zy = y^2 + z^2 = A(y; z); \\
A\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right) & = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144 + 25}{169} = \boxed{1}.
\end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 10

1. Представьте в виде степени

$$\frac{z^{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{z \sqrt[4]{z}}}{z^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{z \sqrt[4]{z}}} = \frac{z^{\frac{1}{9}} \left(z \cdot z^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}} \left(z \cdot z^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{6}}} = z^{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} \cdot \left(z \cdot z^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} =$$

$$= z^{-\frac{2}{9}} \cdot \left(z^{\frac{5}{4}} \right)^{\frac{1}{6}} = z^{-\frac{2}{9} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6}} = z^{\frac{-16+15}{72}} = \boxed{z^{-\frac{1}{72}}}.$$

2. Вычислите $\frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}} =$

$$= \frac{2^9 (3 - 9 \cdot 2 + 3 \cdot 2^3)}{2^{12} (1 + 2^2 - 2^2)} = \frac{3 - 18 + 24}{2^3} = \boxed{\frac{9}{8}}.$$

3. $\sqrt[6]{17\sqrt{5} + 38} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt[6]{(17\sqrt{5} + 38)(\sqrt{5} - 2)^3} =$

$$= \sqrt[6]{(17\sqrt{5} + 38)(5\sqrt{5} - 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3\sqrt{5} \cdot 4 - 8)} =$$

$$= \sqrt[6]{(17\sqrt{5} + 38)(17\sqrt{5} - 38)} = \sqrt[6]{(17\sqrt{5})^2 - (38)^2} =$$

$$= \sqrt[6]{1445 - 1444} = \sqrt[6]{1} = \boxed{1}.$$

4. $\frac{1 - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}} - \frac{z - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{z^{\frac{3}{2}}}$ при $z = 2,25$.

$$\frac{1 - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}} - \frac{z - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{z^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1 - z^{-2}}{z^{\frac{1}{2}}(1 + z^{-1})} - \frac{z(1 - z^{-3})}{z^{\frac{1}{2}}(1 - z^{-1})} + 2 \cdot z^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= z^{-\frac{1}{2}}(1 - z^{-1}) - z^{\frac{1}{2}}(1 + z^{-1} + z^{-2}) + 2z^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= z^{-\frac{1}{2}} - z^{-\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}} - z^{-\frac{3}{2}} + 2z^{-\frac{3}{2}} = -z^{\frac{1}{2}} = A(z);$$

$$A(2,25) = -2,25^{\frac{1}{2}} = \boxed{-1,5}.$$

Решение подготовительной карточки 11

1. Представьте в виде степени

$$\frac{\sqrt[6]{a^2 \sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^5}}}{\sqrt{a \sqrt[9]{a^2}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{18}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{9}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{18}}} =$$

$$= a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2} - \frac{2}{18}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \boxed{a}.$$

2. Вычислите

$$\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1} - \frac{5}{\sqrt{3}+2} - \frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \right) (\sqrt{3}+6) =$$

$$= \left(\frac{16(\sqrt{5}+1)}{5-1} - \frac{5(2-\sqrt{3})}{4-3} - \frac{8(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} \right) (\sqrt{3}+6) =$$

$$= (4(\sqrt{5}+1) - 5(2-\sqrt{3}) - 4(\sqrt{5}+\sqrt{3})) (\sqrt{3}+6) =$$

$$= (4\sqrt{5}+4-10+5\sqrt{3}-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}) (\sqrt{3}+6) =$$

$$= (\sqrt{3}-6) (\sqrt{3}+6) = 3-36 = \boxed{-33}.$$

3. $\sqrt{10-4\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}}$.

$$10-4\sqrt{6} = 4-2 \cdot 2\sqrt{6}+6 = (2-\sqrt{6})^2,$$

$$15-6\sqrt{6} = 9-2 \cdot 3\sqrt{6}+6 = (3-\sqrt{6})^2.$$

$$\sqrt{10-4\sqrt{6}} + \sqrt{15-6\sqrt{6}} = \sqrt{(2-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} =$$

$$= |2-\sqrt{6}| + |3-\sqrt{6}| = \quad (2 < \sqrt{6}; 3 > \sqrt{6})$$

$$= \sqrt{6}-2+3-\sqrt{6} = \boxed{1}.$$

$$4. \frac{1}{\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}} - \frac{\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}}}$$

при $a = -0,125$; $b = -8$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}} - \frac{\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$\begin{aligned}
& a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}\right)^2 \\
&= \frac{a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}}\right) \left(a^{-\frac{2}{3}} - \left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-1} + b^{-\frac{2}{3}}\right)} = \\
&= \frac{\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-2}} - \sqrt[3]{a^{-2}} - 2\sqrt[3]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-2}}}{a^{-1} + b^{-1}} = \\
&= -\frac{3\sqrt[3]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^{-1}}}{a^{-1} + b^{-1}} = A(a; b);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(-0,125; -8) &= \frac{-3\sqrt[3]{(-0,125)^{-1}} \cdot \sqrt[3]{(-8)^{-1}}}{(-0,125)^{-1} + (-8)^{-1}} = \\
&= \frac{-3\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{-0,125}}{-8 - 0,125} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 0,5}{8 + \frac{1}{8}} = \boxed{\frac{24}{65}}.
\end{aligned}$$

Решение подготовительной карточки 12

1. Представьте в виде степени $\frac{\sqrt[4]{a^4 \sqrt{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}}}{\sqrt{a^3 \sqrt{a^{-2}}}} : a^{-\frac{1}{6}} =$

$$\frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{16}} \cdot a^{\frac{5}{16}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{5}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = \boxed{a^{\frac{1}{6}}}$$

2. Вычислите

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2} + 1} - (11 - 5\sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = \\ & = \frac{(1 - \sqrt{10})(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} + \frac{7(2\sqrt{2} - 1)}{8 - 1} - \\ & \quad - (22 - 10\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - 25) = \\ & = \frac{1}{3}(\sqrt{5} - \sqrt{50} - \sqrt{2} + \sqrt{20}) + 2\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{5} - 3) = \\ & = \frac{1}{3}(\sqrt{5} - 5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5}) + 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{5} + 3 = \\ & = \sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{5} + 3 = \boxed{2}. \end{aligned}$$

3. $\sqrt{98\sqrt{48}} - 11\sqrt[4]{12} - 3\sqrt{10\sqrt{75}} + 2\sqrt{12\sqrt{108}} =$

$$\begin{aligned} & = \sqrt{7^2 \cdot 2\sqrt{4^2 \cdot 3}} - 11\sqrt[4]{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 3}} + \\ & \quad + 2\sqrt{2^2 \cdot 3\sqrt{3^3 \cdot 2^2}} = \\ & = 7\sqrt{2 \cdot 4\sqrt{3}} - 11\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} - 3\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}} + 2 \cdot 2\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} = \\ & = 7 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 11 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 5 \cdot 3^{\frac{1}{4}} + 4 \cdot 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = \\ & = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}(14 - 11) + 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}(-15 + 12) = \boxed{0}. \end{aligned}$$

$$4. \left((x^2 + y^2) \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} + (x^2 y^2)^{\frac{1}{3}} \right) \frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right)^{-1}}$$

при $x = \sqrt[4]{27}$; $y = \sqrt[4]{125}$.

$$\left((x^2 + y^2) \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} + (x^2 y^2)^{\frac{1}{3}} \right) \frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right)^{-1}} =$$

$$= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right) \left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\left(x^{\frac{2}{3}} \right)^3 + \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^3}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}} + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right) \left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right) =$$

$$= \left(x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right) \left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right) =$$

$$= \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) \left(x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} \right) = x^{\frac{8}{3}} - y^{\frac{8}{3}} = A(x, y);$$

$$A(\sqrt[4]{27}; \sqrt[4]{125}) = (\sqrt[4]{27})^{\frac{8}{3}} - (\sqrt[4]{125})^{\frac{8}{3}} = 3^{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}} - 5^{\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}} =$$

$$= 3^2 - 5^2 = \boxed{-16}.$$

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Упростите и вычислите при $b = 4$:

$$\frac{9b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2}}{(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2} + 6 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}}.$$

Упростите (2-4):

$$2. \frac{1 - \sqrt{2t}}{\frac{1 + \sqrt[4]{2t}}{1 - \sqrt[4]{8t^3}}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}} + \sqrt[4]{4t^2}}{1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2t}}} - \sqrt{2t} \right)^{-1}.$$

$$3. \left(\left(\frac{1}{a + \sqrt{2}} - \frac{a^2 + 4}{a^3 + 2\sqrt{2}} \right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right)^{-1} \right)^2.$$

$$4. A = \frac{(m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}} - (m-x)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{где } x = \frac{2mn}{n^2 + 1}; \quad \begin{cases} m > 0, \\ n \neq 0. \end{cases}$$

Карточка 2

Упростите (1-4):

$$1. A = \frac{x^2 + 2x - 3 + (x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2 - 2x - 3 + (x-1)\sqrt{x^2-9}}.$$

$$2. A = \frac{x^2 - 4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)^2 - 4}}.$$

$$3. \left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$4. \frac{2^{1,5}}{2^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{5}{6}} + 2^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \cdot \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a-8} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - 2} \right).$$

Карточка 3

Упростите (1-4):

$$1. \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$$2. \frac{a - b}{a + b + 2\sqrt{ab}} : \frac{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$3. A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$4. \frac{a^{\frac{4}{3}} + 27\sqrt[3]{a}}{16 - a^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{49}{27 + a} - \frac{a^{\frac{1}{3}} + 3}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 9} \right) + \frac{40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + \sqrt[3]{a}}.$$

Карточка 4

Упростите (1-2):

$$1. \frac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}.$$

$$2. \left(\frac{a + a^{\frac{3}{4}}\sqrt{b} + \sqrt[4]{a} \cdot b^{\frac{3}{2}} + b^2}{\sqrt{a} + 2a^{0,25} \cdot \sqrt{b} + b} \cdot (a^{\frac{1}{4}} + \sqrt{b}) + \right. \\ \left. + \frac{3b^{0,5}(\sqrt{a} - b)}{\sqrt{a^{-0,5}}} (\sqrt[4]{a} - \sqrt{b})^{-1} \right)^{-0,(3)} : (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^{-1}.$$

$$3. \text{Вычислите } \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}.$$

$$4. \text{Упростите } A = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{при } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right),$$

$$\text{если } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

Карточка 5

Упростите (1-4):

$$1. \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} + t} - \frac{1 - t}{x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}}}{x^3 - t^3} \right)^{-1} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$2. \frac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$3. \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right).$$

$$4. A = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1} \right).$$

Карточка 6

Упростите (1-4):

$$1. \left(\frac{1 - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{x^{-2} - x}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} \right) \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{-1}.$$

$$2. \frac{8 - x}{2 + \sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2 + \sqrt[3]{x}} \right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}}.$$

$$3. \frac{x^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{2x}\right)^2 - 3}}.$$

$$4. \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+8} - \frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^3} \right) \left(\frac{1 + 2a^{-\frac{1}{3}}}{1 - 2a^{-\frac{1}{3}}} \right)^2 - \frac{12}{a+8}.$$

Карточка 7

1. Вычислите $\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}} + 7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}} + 6\sqrt[3]{375}}$.

2. Упростите и вычислите при $a = 9$, $b = 4$:

$$\left(\frac{2\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{ab^{-\frac{1}{6}} - b^{\frac{5}{6}}}\right)^{-1} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}\right).$$

3. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$:

$$\sqrt{10a + 2\sqrt{25a^2 - b^2}} - \sqrt{10a - 2\sqrt{25a^2 - b^2}} - 2\sqrt{5a - b}.$$

4. Вычислите при $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$:

$$f(x) = \frac{4x + x^2}{2 + \sqrt{4 + x}} - \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{4 - x}}.$$

Карточка 8

1. Упростите и вычислите при $b = 8,5$:

$$\frac{\sqrt[3]{b + 4\sqrt{b-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{b-4} + 2}}{\sqrt[3]{b-4\sqrt{b-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{b-4} - 2}} \cdot \frac{b - 4\sqrt{b-4}}{2}.$$

2. Вычислите при $x = 1,01$:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{(1+3x) + \sqrt{x}(3+x)} - \sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)} - (3x+1)}.$$

3. Вычислите: $\sqrt[3]{5 + \frac{11\sqrt{13}}{8}} + \sqrt[3]{5 - \frac{11\sqrt{13}}{8}}$.

4. Вычислите при $t = \frac{5\sqrt{11}}{2}$:

$$f(t) = \frac{9t + t^2}{3 + \sqrt{9 + t}} + \frac{9t - t^2}{3 - \sqrt{9 - t}} + 6t.$$

Решение тренировочных карточек

Решение тренировочной карточки 1

1. Упростите и вычислите при $b = 4$:

$$\begin{aligned} & \frac{9b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2}}{(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-2} + 6 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} = \\ & = \frac{b^{-2}(9b^{\frac{10}{3}} - a^{\frac{3}{2}})}{(b^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{3}{2}} + 6 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{5}{3}} + 9b^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} = \\ & = \frac{b^{-2}(3b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{3}{4}})(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}})}{b^{-1} \left((a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}} = \\ & = \frac{b^{-2} \cdot b^2 (3b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{3}{4}})(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}})}{b^{-1} |a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}}| (a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}})} = \frac{(-1)(3b^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{3}{4}})}{b^{-1}(a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}})} = -b, \end{aligned}$$

так как $\begin{cases} a^{\frac{3}{4}} > 0 \\ b^{\frac{5}{3}} > 0 \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{3}{4}} + 3b^{\frac{5}{3}} > 0.$

при $b = 4$ выражение, после упрощения, равно -4 .

2. Упростите:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \sqrt{2t}}{\frac{1 + \sqrt[4]{2t}}{1 - \sqrt[4]{8t^3}}} \left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}} + \sqrt[4]{4t^2}}{1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2t}}} - \sqrt{2t} \right)^{-1} = \\ & = \frac{(1 - \sqrt{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3})}{1 + \sqrt[4]{2t}} \left(\frac{\frac{1 + \sqrt[4]{8t^3}}{\sqrt[4]{2t}}}{\frac{\sqrt[4]{2t} + 1}{\sqrt[4]{2t}}} - \sqrt{2t} \right)^{-1} = \\ & = \frac{(1 + \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3})}{1 + \sqrt[4]{2t}} \left(\frac{1 + \sqrt[4]{8t^3}}{1 + \sqrt[4]{2t}} - \sqrt{2t} \right)^{-1} = \\ & = (1 - \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3}) \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{2t} + \sqrt[4]{4t^2})}{1 + \sqrt[4]{2t}} - \sqrt{2t} \right)^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3})(1 - \sqrt[4]{2t} + \sqrt{2t} - \sqrt{2t})^{-1} = \\
 &= \frac{(1 - \sqrt[4]{2t})(1 - \sqrt[4]{8t^3})}{1 - \sqrt[4]{2t}} = 1 - \sqrt[4]{8t^3}.
 \end{aligned}$$

3. Упростите:

$$\begin{aligned}
 &\left(\left(\frac{1}{a + \sqrt{2}} - \frac{a^2 + 4}{a^3 + 2\sqrt{2}} \right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right)^{-1} \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{a^2 - a\sqrt{2} + 2 - a^2 - 4}{(a + \sqrt{2})(a^2 - a\sqrt{2} + 2)} : \left(\frac{a^2\sqrt{2} - 2a + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot a} \right)^{-1} \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{-\sqrt{2}(a + \sqrt{2})}{(a + \sqrt{2})(a^2 - a\sqrt{2} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{2}(a^2 - a\sqrt{2} + 2)}{2\sqrt{2} \cdot a} \right)^2 = \\
 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}a} \right)^2 = \frac{1}{2a^2}.
 \end{aligned}$$

4. Упростите:

$$A = \frac{(m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}} - (m-x)^{\frac{1}{2}}} \text{ при } x = \frac{2mn}{n^2+1}; \quad \begin{cases} m > 0 \\ n \neq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{((m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}})((m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}})}{((m+x)^{\frac{1}{2}} - (m-x)^{\frac{1}{2}})((m+x)^{\frac{1}{2}} + (m-x)^{\frac{1}{2}})} = \\
 &= \frac{m+x + 2\sqrt{m+x} \cdot \sqrt{m-x} + m-x}{m+x - m+x} = \\
 &= \frac{m + \sqrt{m+x} \cdot \sqrt{m-x}}{x}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \sqrt{m+x} &= \sqrt{m + \frac{2mn}{n^2+1}} = \sqrt{\frac{mn^2 + m + 2mn}{n^2+1}} = \\
 &= \sqrt{\frac{m(n^2 + 2n + 1)}{n^2+1}} = |n+1| \sqrt{\frac{m}{n^2+1}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{m-x} &= \sqrt{m - \frac{2mn}{n^2+1}} = \sqrt{\frac{mn^2+m-2mn}{n^2+1}} = \\ &= \sqrt{\frac{m(n^2-2n+1)}{n^2+1}} = |n-1| \sqrt{\frac{m}{n^2+1}}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}A &= \frac{m + |n+1| \sqrt{\frac{m}{n^2+1}} |n-1| \sqrt{\frac{m}{n^2+1}}}{\frac{2mn}{n^2+1}} = \\ &= \frac{m + \frac{m}{n^2+1} |n+1| \cdot |n-1|}{\frac{2mn}{n^2+1}} = \frac{m(n^2+1) + m|n+1| \cdot |n-1|}{2mn} = \\ &= \frac{n^2+1 + |n^2-1|}{2n}.\end{aligned}$$

$$t(n) = n^2 - 1.$$

Распределение знаков для $t(n) = n^2 - 1$:



а) $|n^2 - 1| = 1 - n^2$ при $\begin{cases} -1 \leq n < 0, \\ 0 < n \leq 1, \end{cases}$ тогда

$$A = \frac{n^2 + 1 + 1 - n^2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

б) $|n^2 - 1| = n^2 - 1$ при $n < -1$, тогда

$$A = \frac{n^2 + 1 + n^2 - 1}{2n} = n.$$

в) $|n^2 - 1| = n^2 - 1$ при $n > 1$, тогда

$$A = \frac{n^2 + 1 + n^2 - 1}{2n} = n.$$

$$A = \begin{cases} n & \text{при } |n| > 1; m > 0, \\ \frac{1}{n} & \text{при } |n| \leq 1; n \neq 0; m > 0. \end{cases}$$

Решение тренировочной карточки 2

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x^2 + 2x - 3 + (x + 1)\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2x - 3 + (x - 1)\sqrt{x^2 - 9}} = \\
 &= \frac{(x + 3)(x - 1) + (x + 1)\sqrt{x^2 - 9}}{(x - 3)(x + 1) + (x - 1)\sqrt{x^2 - 9}}.
 \end{aligned}$$

Область определения выражения:

$$D(A) = (-\infty; -3] \cup (3; +\infty).$$

$$а) \quad x + 3 = \begin{cases} (\sqrt{x + 3})^2 & \text{при } x \geq -3, \\ -(\sqrt{-x - 3})^2 & \text{при } x < -3; \end{cases}$$

$$б) \quad x - 3 = \begin{cases} (\sqrt{x - 3})^2 & \text{при } x \geq 3, \\ -(\sqrt{3 - x})^2 & \text{при } x < 3; \end{cases}$$

$$в) \quad \sqrt{(x + 3)(x - 3)} = \begin{cases} \sqrt{x + 3} \cdot \sqrt{x - 3} & \text{при } x \geq 3, \\ \sqrt{-x - 3} \cdot \sqrt{3 - x} & \text{при } x < -3. \end{cases}$$

1) При $x \leq -3$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{-(\sqrt{-x - 3})^2(x - 1) + (x + 1)\sqrt{-x - 3} \cdot \sqrt{3 - x}}{-(\sqrt{3 - x})^2(x + 1) + (x - 1)\sqrt{-x - 3} \cdot \sqrt{3 - x}} = \\
 &= \frac{-\sqrt{-x - 3}(\sqrt{-x - 3}(x - 1) - (x + 1)\sqrt{3 - x})}{\sqrt{3 - x}(-\sqrt{3 - x}(x + 1) + (x - 1)\sqrt{-x - 3})} = \\
 &= -\frac{\sqrt{-x - 3}}{\sqrt{3 - x}} = -\sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}}.
 \end{aligned}$$

2) При $x > 3$

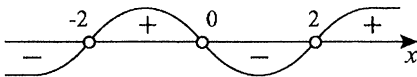
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(\sqrt{x + 3})^2(x - 1) + (x + 1)\sqrt{x + 3} \cdot \sqrt{x - 3}}{(\sqrt{x - 3})^2(x + 1) + (x - 1)\sqrt{x + 3} \cdot \sqrt{x - 3}} = \\
 &= \frac{\sqrt{x + 3}((x - 1)\sqrt{x + 3} + (x + 1)\sqrt{x - 3})}{\sqrt{x - 3}((x + 1)\sqrt{x - 3} + (x - 1)\sqrt{x + 3})} = \\
 &= \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}}.
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{cases} \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} & \text{при } x > 3, \\ -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} & \text{при } x \leq -3. \end{cases}$$

2. Упростите и вычислите:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - 4}{x \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)^2 - 4}} = \frac{x^2 - 4}{x \sqrt{\frac{x^4+8x^2+16-16x^2}{4x^2}}} = \\ &= \frac{x^2 - 4}{x \sqrt{\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2}}} = \frac{x^2 - 4}{x \sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}} = \frac{x^2 - 4}{x \left|\frac{x^2-4}{2x}\right|}. \end{aligned}$$

$$t(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}.$$



$$\text{Итак, } A = \begin{cases} 2 & \text{при } x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty), \\ -2 & \text{при } x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2). \end{cases}$$

3. Упростите:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(-\sqrt[4]{x} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{-\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right| = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. Упростите:

$$\begin{aligned}
& \frac{2^{1,5}}{2^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{5}{6}} + 2^{1,5} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a - 8} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - 2} \right) = \\
& = \frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 2^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \cdot \frac{2a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4}{(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4)} = \\
& = \frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 2^{1,5})}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2}{(a^{\frac{1}{3}} - 2)(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 4)} = \\
& = \frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 2^{1,5})(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2}{(a^{\frac{1}{3}} + 2)^2(a - 8)} = \\
& = \frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} + \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{2}} + 2^{1,5})}{(a^{\frac{1}{2}} - 2^{1,5})(a^{\frac{1}{2}} + 2^{1,5})} = \\
& = \frac{2^{1,5}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} - \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{1,5} - a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} = \\
& = \frac{2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}(2^{1,5} - a^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{-\frac{1}{6}}.
\end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 3

$$\begin{aligned}
 1. & \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{1}{a - b} + \\
 & \quad + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = (a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab}) \cdot \frac{1}{a - b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} + \\
 & \quad + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
 & = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. & \frac{a - b}{a + b + 2\sqrt{ab}} : \frac{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{a - b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} : \frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})}{a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}})} = \\
 & = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \cdot \frac{(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}})}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = -1.
 \end{aligned}$$

$$3. A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab} - |b|}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$\sqrt{ab} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & \text{при } \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \end{cases} \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} & \text{при } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \text{при } \begin{cases} a \geq 0, \\ b > 0, \end{cases} \\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} & \text{при } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} (\sqrt{b})^2 & \text{при } b \geq 0, \\ -(\sqrt{-b})^2 & \text{при } b < 0; \end{cases}$$

$$|b| = \begin{cases} b & \text{при } b \geq 0, \\ -b & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

а) При $b > 0$ ($a \geq 0$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{ab} - b}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - (\sqrt{b})^2}{(\sqrt{b})^2} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \\ &= \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{b})^2} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \\ &= -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = -1. \end{aligned}$$

б) При $b < 0$ ($a \leq 0$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{ab} + b}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} + (-\sqrt{-b})^2}{-\sqrt{-b})^2} - \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \\ &= \frac{\sqrt{-b}(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})}{-\sqrt{-b})^2} - \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}} - \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \\ &= -\left(\frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b} + \sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}\right) = -\frac{2\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}. \end{aligned}$$

$$A = \begin{cases} -1 & \text{при } \begin{cases} a \geq 0, \\ b > 0, \end{cases} \\ -\frac{2\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} & \text{при } \begin{cases} a \leq 0, \\ b < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Можно решить проще, если догадаться, что

$$A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab} - |b|}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{|b|}.$$

а) При $b > 0$, $a \geq 0$

$$A = \frac{\sqrt{ab} - b}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{ab} - b - \sqrt{ab}}{b} = -1.$$

б) При $b < 0$, $a \leq 0$

$$A = \frac{\sqrt{ab} + b}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{2\sqrt{ab} + b}{b} = 2\frac{\sqrt{ab}}{b} + 1 = -2\sqrt{\frac{a}{b}} + 1.$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \frac{a^{\frac{4}{3}} + 27\sqrt[3]{a}}{16 - a^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{49}{27 + a} - \frac{a^{\frac{1}{3}} + 3}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 9} \right) + \frac{40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + \sqrt[3]{a}} = \\ & = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a + 27)}{16 - a^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{49}{(3 + a^{\frac{1}{3}})(9 - 3a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})} - \frac{a^{\frac{1}{3}} + 3}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 9} \right) + \\ & + \frac{40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + \sqrt[3]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + 3)(a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 9)}{(4 - a^{\frac{1}{3}})(4 + a^{\frac{1}{3}})} \times \\ & \times \frac{49 - (a^{\frac{1}{3}} + 3)^2}{(3 + a^{\frac{1}{3}})(9 - 3a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})} + \frac{40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + a^{\frac{1}{3}}} = \\ & = \frac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}} + 3)(a^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 9)(7 + a^{\frac{1}{3}} + 3)(7 - a^{\frac{1}{3}} - 3)}{(4 - a^{\frac{1}{3}})(4 + a^{\frac{1}{3}})(3 + a^{\frac{1}{3}})(9 - 3a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})} + \\ & + \frac{40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(10 + a^{\frac{1}{3}})(4 - a^{\frac{1}{3}})}{(4 - a^{\frac{1}{3}})(4 + a^{\frac{1}{3}})} + \frac{40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + a^{\frac{1}{3}}} = \\ & = \frac{10a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + 40 - a^{\frac{2}{3}}}{4 + a^{\frac{1}{3}}} = \frac{10a^{\frac{1}{3}} + 40}{4 + a^{\frac{1}{3}}} = \frac{10(a^{\frac{1}{3}} + 4)}{4 + a^{\frac{1}{3}}} = 10. \end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 4

1. Упростите: $\frac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

Так как

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = \\ = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4,$$

то

$$\frac{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}.$$

2. Упростите:

$$\left(\frac{a + a^{\frac{3}{4}}\sqrt{b} + \sqrt[4]{a} \cdot b^{\frac{3}{2}} + b^2}{\sqrt{a} + 2a^{0,25} \cdot \sqrt{b} + b} (a^{\frac{1}{4}} + \sqrt{b}) + \right. \\ \left. + \frac{3b^{0,5}(\sqrt{a} - b)}{\sqrt{a^{-0,5}}} (\sqrt[4]{a} - \sqrt{b})^{-1} \right)^{-0,(3)} : (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^{-1} = \\ = \left(\frac{a^{\frac{3}{4}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) + b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b} \cdot (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) + \right. \\ \left. + \frac{3b^{0,5}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})}{a^{-\frac{0,5}{2}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})} \right)^{-0,(3)} : (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})^{-1} = \\ = \left(\frac{(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})}{(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})^2} + \frac{3b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})}{a^{-\frac{1}{4}}} \right)^{-0,(3)} \times \\ \times (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = \\ = \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}} + 3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) \right)^{-\frac{1}{3}} \times \\ \times (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) =$$

$\begin{array}{r} 0,(3) = x \\ \hline 3,(3) = 10x \\ \hline -3,0 = -9x \\ x = \frac{1}{3} \end{array}$
--

$$\begin{aligned}
&= \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b) + 3a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) \right)^{-\frac{1}{3}} \times \\
&\times (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b + 3a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}) \right)^{-\frac{1}{3}} \times \\
&\times (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b) \right)^{-\frac{1}{3}} (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = \\
&= \left((a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})^3 \right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})^{-1} (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}) = 1.
\end{aligned}$$

3. Вычислите: $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

Пусть

$$\begin{cases} \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} = a \\ \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = b \end{cases} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} a^3 = 9 + \sqrt{80} \\ b^3 = 9 - \sqrt{80} \end{cases} \quad a^3 + b^3 = 18.$$

Так как

$$a \cdot b = \sqrt[3]{(9 + \sqrt{80})(9 - \sqrt{80})} = \sqrt[3]{81 - 80} = 1,$$

то $18 = (a + b)((a + b)^2 - 3 \cdot 1)$. Положим $a + b = t$, тогда

$$18 = t(t^2 - 3) \Rightarrow t^3 - 3t - 18 = 0;$$

$$t^3 - 9t + 6t - 18 = 0;$$

$$t(t^2 - 9) + 6(t - 3) = 0;$$

$$(t - 3)(t^2 + 3t + 6) = 0;$$

$$\begin{cases} t - 3 = 0 \\ (t + 1,5)^2 + 3,75 = 0 \end{cases} \iff t = 3.$$

Итак, $a + b = 3$, значит,

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3, \text{ что и требовалось вычислить.}$$

4. Упростите:

$$A = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{при } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \text{ если } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2 - 1} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) - 1} = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{a-b}{\sqrt{ab}} \right|.
\end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \sqrt{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}} & \text{при } a \geq b > 0, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{ab}} & \text{при } b \geq a > 0. \end{cases}$$

а) При $a \geq b > 0$

$$A = \frac{2b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(a-b)}{a+b-a+b} = a-b.$$

б) При $b > a > 0$

$$A = \frac{2b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(b-a)}{a+b+a-b} = \frac{b}{a}(b-a).$$

$$A = \begin{cases} a-b & \text{при } a \geq b > 0, \\ \frac{b}{a}(b-a) & \text{при } b > a > 0. \end{cases}$$

Решение тренировочной карточки 5

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} + t} - \frac{1 - t}{x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}}}{x^3 - t^3} \right)^{-1} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-\frac{3}{2}} = \\
& = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} + t} - \frac{1 - t}{(x^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}})(x - x^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} + t)} \right) \times \\
& \quad \times \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}(1 - x)}{x^3 - t^3} \right)^{-1} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-\frac{3}{2}} = \\
& = \frac{(x^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}) - (1 - t)}{(x^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}})(x - x^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} + t)} \cdot \frac{x^3 - t^3}{x^{\frac{3}{2}}(1 - x)} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-\frac{3}{2}} = \\
& = \frac{x - t - 1 + t}{x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})(x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}})}{x^{\frac{3}{2}}(1 - x)} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-\frac{3}{2}} = \\
& = \frac{(x - 1)(x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}})(x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}})}{(x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) \cdot x^{\frac{3}{2}}(1 - x)} - \left(\frac{x}{t} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{t^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \\
& = \frac{t^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ Упростите: } & \frac{a - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 - a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} = \\
& = \frac{a^{-2}(a^{1-(-2)} - 1)}{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} - 1)} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{-2}(a^2 - 1)}{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} + 1)} = \\
& = \frac{a^{-\frac{3}{2}}(a^3 - 1)}{a - 1} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{-\frac{3}{2}}(a^2 - 1)}{a + 1} = \\
& = a^{-\frac{3}{2}}(a^2 + a + 1) - 2a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}(a - 1) = \\
& = a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 2a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \text{ Упростите: } & \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) = \\
& = \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{(\sqrt{a}-1)^2 - (\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right) = \\
& = \frac{(a-1)^2}{4a} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1+\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1-\sqrt{a}-1)}{a-1} = \\
& = \frac{(a-1)^2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot (-2)}{4a \cdot (a-1)} = -\frac{a-1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

4. Упростите:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} \cdot \frac{x-1-1}{x-1} = \\
&= \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} \cdot \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \\
&(|\sqrt{x-1}+1| = \sqrt{x-1}+1) \\
&= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|}{|\sqrt{x-1}-1| \cdot |\sqrt{x-1}+1|} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \\
&= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + \sqrt{x-1}+1}{|x-1-1|} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \\
&= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + \sqrt{x-1}+1}{|x-2|} \cdot \frac{x-2}{x-1},
\end{aligned}$$

$$|\sqrt{x-1}-1| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-1 & \text{при } \sqrt{x-1} \geq 1, \\ 1-\sqrt{x-1} & \text{при } \sqrt{x-1} < 1, \end{cases}$$

т.е.

$$|\sqrt{x-1}-1| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-1 & \text{при } x \geq 2, \\ 1-\sqrt{x-1} & \text{при } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Так как

$$1) \sqrt{a} < b \iff \begin{cases} b \geq 0, \\ a \geq 0, \\ a < b^2. \end{cases} \quad 2) \sqrt{a} > b \iff \begin{cases} b \geq 0, \\ a > b^2 \\ b < 0, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

а) При $x > 2$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + \sqrt{x-1} + 1}{|x-2|} = \\ &= \frac{\sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}. \end{aligned}$$

б) При $1 \leq x < 2$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + \sqrt{x-1} + 1}{|x-2|} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1}{2-x} = \frac{2}{2-x}. \end{aligned}$$

Итак, при $x > 2$

$$A = A_1 \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = 2(x-1)^{-\frac{1}{2}},$$

а при $1 < x < 2$

$$A = A_2 \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1}.$$

$$A = \begin{cases} 2(x-1)^{-\frac{1}{2}} & \text{при } x > 2, \\ -2(x-1)^{-1} & \text{при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Решение тренировочной карточки 6

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} + \frac{x^{-2} - x}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} \right) \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{-1} = \\
& = \left(\frac{x^{-2}(x^2 - 1)}{x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - (-\frac{1}{2}) - 1)} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{-2}(1 - x^{1+2})}{x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - (-\frac{1}{2}) - 1)} \right) \times \\
& \quad \times \left(\frac{x^2 + 2}{x^2} \right)^{-1} = \\
& = \left(\frac{x^{-\frac{3}{2}}(x^2 - 1)}{x - 1} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{-\frac{3}{2}}(1 - x^3)}{x - 1} \right) \frac{x^2}{x^2 + 2} = \\
& = (x^{-\frac{3}{2}}(x + 1) - 2x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}(x^2 + x + 1)) \cdot \frac{x^2}{x^2 + 2} = \\
& = (x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}) \cdot \frac{x^2}{x^2 + 2} = \\
& = (-2x^{-\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{x^2}{x^2 + 2} = -x^{-\frac{3}{2}}(2 + x^2) \cdot \frac{x^2}{x^2 + 2} = -x^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

2. Упростите:

$$\begin{aligned}
& \frac{8 - x}{2 + \sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2 + \sqrt[3]{x}} \right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}} = \\
& = \frac{(2 - \sqrt[3]{x})(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{2 + \sqrt[3]{x}} : \frac{4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{2 + \sqrt[3]{x}} + \\
& \quad + \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x} + 2)}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 2)} = \\
& = \frac{(2 - \sqrt[3]{x})(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} + \\
& \quad + \frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} - 2)}{(\sqrt[3]{x} - 2)\sqrt[3]{x}} = 2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 2.
\end{aligned}$$

3. Упростите:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{2x}\right)^2 - 3}} &= \frac{x^2 - 3}{\sqrt{\frac{x^4 + 6x^2 + 9 - 12x^2}{4x^2}}} = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)^2}} = \\ &= \frac{x^2 - 3}{\left|\frac{x^2-3}{2x}\right|} = A, \text{ где } A = \begin{cases} 2x; & (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \\ -2x; & (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}) \end{cases}. \end{aligned}$$

Так как $t(x) = \frac{x^2 - 3}{2x}$ ($x \neq \pm\sqrt{3}$)



$$\frac{x^2 - 3}{\left|\frac{x^2-3}{2x}\right|} = 2x \quad \text{при } x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty);$$

$$\frac{x^2 - 3}{\left|\frac{x^2-3}{2x}\right|} = -2x \quad \text{при } x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}).$$

4. Упростите:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+8} - \frac{4a}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^3} \right) \left(\frac{1+2a^{-\frac{1}{3}}}{1-2a^{-\frac{1}{3}}} \right)^2 - \frac{12}{a+8} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \left((a^{\frac{1}{3}}+2)^2 - 4(a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 4) \right)}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^3 (a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 4)} \cdot \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2)} \right)^2 - \frac{12}{a+8} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a^{\frac{2}{3}} + 4a^{\frac{1}{3}} + 4 - 4a^{\frac{2}{3}} + 8a^{\frac{1}{3}} - 16)}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2 (a+8)} \cdot \frac{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(a^{\frac{1}{3}}-2)^2} - \frac{12}{a+8} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot (-3)(a^{\frac{1}{3}}-2)^2 (a^{\frac{1}{3}}+2)^2}{(a^{\frac{1}{3}}+2)^2 (a+8) (a^{\frac{1}{3}}-2)^2} - \frac{12}{a+8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3a}{a+8} - \frac{12}{a+8} = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+8} + \frac{8}{a+8} \right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{a+8}{a+8} = -1,5. \end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 7

1. Вычислите

$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}} + 7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}} + 6\sqrt[3]{375}} &= \frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{64 \cdot 3}} + 7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{27 \cdot 3}}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 3}} + 6\sqrt[3]{125 \cdot 3}} = \\ &= \frac{5\sqrt[3]{16\sqrt[3]{3}} + 7\sqrt[3]{27 \cdot 2\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3\sqrt[3]{3}} + 30\sqrt[3]{3}} = \frac{10\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}} + 21\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{27 \cdot 2\sqrt[3]{3}}} = \\ &= \frac{31\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Упростите и вычислите при $a = 9$, $b = 4$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{ab^{-\frac{1}{6}} - b^{\frac{5}{6}}}\right)^{-1} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}\right) = \\ &= \left(\frac{2\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}{b^{-\frac{1}{6}}(a - b)}\right)^{-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{a} - (a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})^2}{(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[6]{b})} = \\ &= \frac{b^{-\frac{1}{6}}(a - b)}{2\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} \cdot \frac{(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\ &= \frac{b^{-\frac{1}{6}}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(2\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(-\sqrt[6]{b})}{(2\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \\ &= \sqrt{b} - \sqrt{a} = f(a, b). \end{aligned}$$

При $a = 9$, $b = 4$ имеем $f(9; 4) = \sqrt{4} - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$.

3. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$:

$$\begin{aligned} &\sqrt{10a + 2\sqrt{25a^2 - b^2}} - \sqrt{10a - 2\sqrt{25a^2 - b^2}} - 2\sqrt{5a - b} = \\ &= \sqrt{5a + b + 2\sqrt{(5a + b)(5a - b)}} + 5a - b - \\ &\quad - \sqrt{5a + b - 2\sqrt{(5a + b)(5a - b)}} + 5a - b - 2\sqrt{5a - b} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{5a + b} + \sqrt{5a - b})^2} - \sqrt{(\sqrt{5a + b} - \sqrt{5a - b})^2} - 2\sqrt{5a - b} = \\ &= |\sqrt{5a + b} + \sqrt{5a - b}| - |\sqrt{5a + b} - \sqrt{5a - b}| - 2\sqrt{5a - b} = \\ &= \sqrt{5a + b} + \sqrt{5a - b} - \sqrt{5a + b} + \sqrt{5a - b} - 2\sqrt{5a - b} = 0 \\ &(5a + b \geq 5a - b, b \geq 0). \end{aligned}$$

4. Вычислите при $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$: $f(x) = \frac{4x + x^2}{2 + \sqrt{4+x}} - \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{4-x}}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{4+x}{2 + \sqrt{4+x}} - \frac{4-x}{2 - \sqrt{4-x}} \right) = \\ &= x \left(\frac{(4+x)(2 - \sqrt{4+x})}{4 - 4 - x} - \frac{(4-x)(2 + \sqrt{4-x})}{4 - 4 + x} \right) = \\ &= - \left(8 + 2x - (\sqrt{4+x})^3 + 8 - 2x + (\sqrt{4-x})^3 \right) = \\ &= (\sqrt{4+x})^3 - (\sqrt{4-x})^3 - 16. \end{aligned}$$

При $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$$\sqrt{4 + \frac{\sqrt{15}}{2}} = \sqrt{\frac{16 + 2\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{15} + 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{15} + 1}{2};$$

$$\sqrt{4 - \frac{\sqrt{15}}{2}} = \sqrt{\frac{16 - 2\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{15} - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{15} - 1}{2}.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{15} + 1}{2} - \frac{\sqrt{15} - 1}{2}\right) \times \\ &\times \left(\left(\frac{\sqrt{15} + 1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{15} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15} - 1}{2} + \left(\frac{\sqrt{15} - 1}{2}\right)^2 \right) - 16 = \\ &= 1 \cdot \left(\frac{15 + 2\sqrt{15} + 1}{4} + \frac{15 - 1}{4} + \frac{15 - 2\sqrt{15} + 1}{4} \right) - 16 = \\ &= 8 + \frac{14}{4} - 16 = 11,5 - 16 = -4,5. \end{aligned}$$

Возможно другое решение. Так как

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{15} + 1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{15} - 1}{2}\right)^3 - 16 &= \left(\frac{\sqrt{15} + 1}{2} - \frac{\sqrt{15} - 1}{2}\right)^3 + \\ + 3 \cdot \frac{\sqrt{15} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15} - 1}{2} \left(\frac{\sqrt{15} + 1}{2} - \frac{\sqrt{15} - 1}{2}\right) - 16 &= \\ = 1 + 3 \cdot \frac{7}{2} - 16 &= -4,5. \end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 8

1. Упростите и вычислите при
- $b = 8,5$
- :

$$f(b) = \frac{\sqrt[3]{b + 4\sqrt{b-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{b-4} + 2}}{\sqrt[3]{b - 4\sqrt{b-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{b-4} - 2}} \cdot \frac{b - 4\sqrt{b-4}}{2}.$$

Так как

$$b + 4\sqrt{b-4} = b - 4 + 2 \cdot 2\sqrt{b-4} + 4 = (\sqrt{b-4} + 2)^2,$$

$$b - 4\sqrt{b-4} = b - 4 - 2 \cdot 2\sqrt{b-4} + 4 = (\sqrt{b-4} - 2)^2,$$

то

$$\begin{aligned} f(b) &= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{b-4} + 2)^2} \sqrt[3]{\sqrt{b-4} + 2}}{\sqrt[3]{(\sqrt{b-4} - 2)^2} \sqrt[3]{\sqrt{b-4} - 2}} \cdot \frac{b - 4\sqrt{b-4}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{b-4} + 2)^3} b - 4\sqrt{b-4}}{\sqrt[3]{(\sqrt{b-4} - 2)^3} 2} = \\ &= \frac{(\sqrt{b-4} + 2)(\sqrt{b-4} - 2)^2}{2(\sqrt{b-4} - 2)} = \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{b-4} + 2)(\sqrt{b-4} - 2) = \frac{1}{2}(b - 4 - 4) = \frac{1}{2}(b - 8). \end{aligned}$$

$$f(8,5) = \frac{1}{2}(8,5 - 8) = \frac{1}{4}.$$

2. Вычислите при
- $x = 1,01$
- :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{(1 + 3x) + \sqrt{x}(3 + x)} - \sqrt[3]{\sqrt{x}(3 + x) - (3x + 1)}}.$$

Вычислим $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Пусть $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = a$, $\sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} = b$, тогда

$$\begin{cases} 38 + 17\sqrt{5} = a^3 \\ 38 - 17\sqrt{5} = b^3 \end{cases} \quad \left| \quad a^3 + b^3 = 76; \right.$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}} = \sqrt[3]{38^2 - (17\sqrt{5})^2} = \\ &= \sqrt[3]{1444 - 1445} = -1; \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = \\ = (a + b)((a + b)^2 + 3) = 76.$$

Пусть $a + b = t$; $t^3 + 3t - 76 = 0$; $t = 4$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^3 + 3t - 76 & t - 4 \\ \underline{t^3 - 4t^2} & \underline{t^2 + 4t + 19} \\ 4t^2 + 3t - 76 & \\ \underline{4t^2 - 16t} & \\ 19t - 76 & \\ \underline{19t - 76} & \end{array} \quad \mathcal{D} < 0$$

Значит, $t = 4$, то есть $a + b = 4$.

Рассмотрим

$$\sqrt[3]{(1 + 3x) + \sqrt{x}(3 + x)} - \sqrt[3]{\sqrt{x}(3 + x) - (1 + 3x)} = \\ = \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} + 1} - \sqrt[3]{x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1} = \\ = \sqrt[3]{(\sqrt{x} + 1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{x} - 1)^3} = \sqrt{x} + 1 - (\sqrt{x} - 1) = 2.$$

Тогда $f(x) = \frac{4}{2} = 2$, следовательно $f(1,01) = 2$.

3. Вычислите: $\sqrt[3]{5 + \frac{11\sqrt{13}}{8}} + \sqrt[3]{5 - \frac{11\sqrt{13}}{8}}$.

$$\begin{array}{r|l} a = \sqrt[3]{5 + \frac{11\sqrt{13}}{8}} & a^3 = 5 + \frac{11\sqrt{13}}{8} \\ b = \sqrt[3]{5 - \frac{11\sqrt{13}}{8}} & b^3 = 5 - \frac{11\sqrt{13}}{8} \end{array} \quad a^3 + b^3 = 10.$$

$$a \cdot b = \sqrt[3]{\left(5 + \frac{11\sqrt{13}}{8}\right)\left(5 - \frac{11\sqrt{13}}{8}\right)} = \sqrt[3]{25 - \frac{121 \cdot 13}{8^2}} = \\ = \frac{\sqrt[3]{25 \cdot 64 - 121 \cdot 13}}{4} = \frac{\sqrt[3]{1600 - 1573}}{4} = \frac{\sqrt[3]{27}}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = \\ = (a + b)\left((a + b)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4}\right) = 10.$$

$$a + b = t; \quad t \left(t^2 - \frac{9}{4} \right) = 10; \quad 4t^3 - 9t - 40 = 0$$

$$f(t) = 4t^3 - 9t - 40; \quad d = \frac{d_1}{d_2}.$$

Так как $d_1 = \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 8; \pm 10; \pm 20; \pm 40;$
 $d_2 = \pm 1; \pm 2; \pm 4,$

$$f(2,5) = \frac{4 \cdot 5^3}{2^3} - \frac{9 \cdot 5}{2} - 40 = \frac{125}{2} - 22,5 - 40 = 62,5 - 22,5 - 40 = 0.$$

Тогда

$$\begin{array}{r} 4t^3 - 9t - 40 \\ - \quad 4t^3 - 10t^2 \\ \hline 10t^2 - 9t - 40 \\ - \quad 10t^2 - 25t \\ \hline 16t - 40 \\ - \quad 16t - 40 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2t - 5 \\ \hline 2t^2 + 5t + 8 \end{array} \right. \quad D < 0$$

Значит, $a + b = 2,5$.

4. Вычислите при $t = \frac{5\sqrt{11}}{2}$:

$$f(t) = \frac{9t + t^2}{3 + \sqrt{9+t}} + \frac{9t - t^2}{3 - \sqrt{9-t}} + 6t.$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t \left(\frac{9+t}{3 + \sqrt{9+t}} + \frac{9-t}{3 - \sqrt{9-t}} + 6 \right) = \\ &= t \left(\frac{(9+t)(3 - \sqrt{9+t})}{9 - 9 - t} + \frac{(9-t)(3 + \sqrt{9-t})}{9 - 9 + t} + 6 \right) = \\ &= (9-t)(3 + \sqrt{9-t}) - (9+t)(3 - \sqrt{9+t}) + 6t = \\ &= 27 - 3t + (\sqrt{9-t})^3 - 27 - 3t + (\sqrt{9+t})^3 + 6t = \\ &= (\sqrt{9-t})^3 + (\sqrt{9+t})^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - \frac{5\sqrt{11}}{2}} &= \sqrt{\frac{18 - 5\sqrt{11}}{2}} = \sqrt{\frac{36 - 10\sqrt{11}}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{5^2 - 2 \cdot 5\sqrt{11} + 11}{4}} = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2} \right)^2} = \frac{5 - \sqrt{11}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{9 + \frac{5\sqrt{11}}{2}} &= \sqrt{\frac{18 + 5\sqrt{11}}{2}} = \sqrt{\frac{36 + 10\sqrt{11}}{4}} = \\
&= \sqrt{\frac{5^2 + 2 \cdot 5\sqrt{11} + 11}{4}} = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right)^2} = \frac{5 + \sqrt{11}}{2} \\
f\left(\frac{5\sqrt{11}}{2}\right) &= \left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2}\right)^3 + \left(\frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right)^3 = \\
&= \left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2} + \frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right) \times \\
&\quad \times \left(\left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2}\right)^2 - \frac{5 - \sqrt{11}}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{11}}{2} + \left(\frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right)^2\right) = \\
&= 5 \left(\frac{25 - 10\sqrt{11} + 11}{4} - \frac{25 - 11}{4} + \frac{25 + 10\sqrt{11} + 11}{4}\right) = \\
&= 5 \left(9 - \frac{7}{2} + 9\right) = 5 \cdot 14,5 = 72,5.
\end{aligned}$$

Возможно другое решение. Так как

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b), \text{ то}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{5\sqrt{11}}{2}\right) &= \left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2}\right)^3 + \left(\frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right)^3 = \\
&= \left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2} + \frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right)^3 - \\
&\quad - 3 \cdot \frac{5 - \sqrt{11}}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{11}}{2} \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2} + \frac{5 + \sqrt{11}}{2}\right) = \\
&= 125 - 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot 5 = 125 - 52,5 = 72,5
\end{aligned}$$

Зачетные карточки

Карточка 1

Упростите (1-4):

$$1. \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$2. \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right).$$

$$3. A = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

$$4. \frac{3}{y-1} + \left(\frac{y^{-\frac{1}{3}} - 1}{y^{-\frac{1}{3}} + 1} \right)^2 \left(\frac{y}{y-1} + \frac{4y}{(1-y^{\frac{1}{3}})^3} \right).$$

Карточка 2

$$1. \text{ Упростите: } \frac{\sqrt{(2p+1)^3 + \sqrt{8p^3 - 12p^2 + 6p - 1}}}{\sqrt{4p + 2\sqrt{4p^2 - 1}}}.$$

$$2. \text{ Проверьте: } \sqrt[3]{\frac{10 - 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}.$$

3. Упростите:

$$\left(\frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}-1+b} + \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}} \right) \left(\frac{1-b}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2}-1} \right) \times \\ \times \frac{b}{1-b+\sqrt{1-b^2}}.$$

4. Упростите:

$$\frac{1}{2\sqrt{2b+1}} + \\ + \left(\frac{(2\sqrt[3]{b^2}-1)^2}{8b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt{2b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} \right)^{-1} \left(\frac{6}{1-8b^2} + \frac{1}{2b \cdot \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^2}} \right).$$

Карточка 3

1. Упростите:

$$\frac{b^2 - 3b - (b-1)\sqrt{b^2-4} + 2}{b^2 + 3b - (b+1)\sqrt{b^2-4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}}.$$

2. Упростите:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{y}}{\sqrt{1+y}} - \frac{\sqrt{1+y}}{1 + \sqrt{y}} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{y}}{\sqrt{1+y}} + \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{y-1}} \right)^2.$$

3. Вычислите: $\sqrt[3]{15\sqrt{3} + 26} \cdot (\sqrt{3} - 2).$ 4. Упростите: $\frac{\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + 2}{\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} - 2}.$

Карточка 4

1. Упростите:

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{t}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{t}} \right) \left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + 2 \right).$$

2. Вычислите: $\sqrt{\left(\frac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2} \right) \sqrt{3}} : (3 + \sqrt[6]{108}).$ 3. Упростите: $\frac{\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4} + b + 2}$ при $b \geq 2.$

4. Упростите:

$$\left(\frac{9}{a+8} - \frac{a^{\frac{1}{3}} + 2}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 4} \right) \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}} + 8a^{\frac{1}{3}}}{1 - a^{\frac{2}{3}}} + \frac{5 - a^{\frac{2}{3}}}{1 + a^{\frac{1}{3}}}.$$

Карточка 5

1. Вычислите: $\left(\frac{\sqrt[4]{8} + 2}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{4}\right) : \left(\frac{\sqrt[4]{8} - 2}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[3]{2}} - 3 \sqrt[12]{128}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Вычислите: $(7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}$.

3. Упростите:

$$\sqrt{\frac{2a + 2\sqrt{a^2 - 9}}{2a - 2\sqrt{a^2 - 9}}}$$

4. Упростите:

$$\left(\sqrt[3]{a} - \left(\frac{b^2 - a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt[3]{a}} + b\sqrt[3]{a}\right) : (b + \sqrt[6]{b^3 \cdot a^2})\right)^{-2} \text{ при } \begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

Карточка 6

1. Упростите:

$$\left(\frac{(1 - ab)(\sqrt[3]{ab} - 1)}{1 + \sqrt{ab}} - (1 - \sqrt[3]{ab})\sqrt{ab}\right)^{-1} \left(\frac{1 + ab}{1 + \sqrt[3]{ab}} - 1\right).$$

2. Вычислите:

$$\left(\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}}\right) \cdot \sqrt[3]{1 - 2\sqrt{6}}.$$

3. Упростите: $A = (a + x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} + (a - x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ при $x = 4(a - 1)$.

4. Упростите:

$$\left(\frac{a\sqrt{a} - a}{\left(\frac{a^{0,75} - 1}{a^{0,25} - 1} - \sqrt{a}\right) \left(\frac{a^{0,75} + 1}{a^{0,25} + 1} - \sqrt{a}\right)}\right)^3 + \left(\frac{(1 + \sqrt[3]{a}) : (a + \sqrt[3]{a^2}) - 1}{1 - \sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-4,5}.$$

Карточка 7

1. Упростите при $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, если $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0: \end{cases}$

$$A = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. Упростите:

$$\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}} \right).$$

3. Вычислите:

$$\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \right)^4.$$

4. Вычислите: $\sqrt[3]{37 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{37 - 30\sqrt{3}}$.

Карточка 8

1. Вычислите:

$$\left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} \right)^4.$$

2. Упростите:

$$\left(\frac{a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + (a-1) \cdot \sqrt{a-4} + 2}{a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + (a-1) \cdot \sqrt{a-4} - 2} \right)^{-2} \cdot \frac{a + \sqrt{a} - 2}{a - \sqrt{a} - 2}.$$

3. Упростите:

$$\frac{8a}{3} - \left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}} + 2}{3a^{-\frac{1}{3}} - 2} \right)^2 : \left(\frac{4}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^3} - \frac{1}{8a - 27} \right).$$

4. Вычислите:

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

6

Решения

Решение проверочной работы 1

Вычислите:

$$1. \sqrt{1,25} + 1,5\sqrt{80} - \frac{1}{14}\sqrt{245} - \sqrt{180} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}} + 1,5\sqrt{16 \cdot 5} - \frac{1}{14}\sqrt{5 \cdot 49} - \sqrt{5 \cdot 36} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + 1,5 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} - \frac{7}{14} \cdot \sqrt{5} - 6\sqrt{5} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 0.$$

$$2. \sqrt{51,5^3 + 51,5^2 \cdot 26,5 - 51,5 \cdot 26,5^2 - 26,5^3} =$$

$$= \sqrt{51,5^2(51,5 + 26,5) - 26,5^2(51,5 + 26,5)} =$$

$$= \sqrt{(51,5 + 26,5)(51,5^2 - 26,5^2)} = \sqrt{(51,5 + 26,5)^2(51,5 - 26,5)} =$$

$$= (51,5 + 26,5)\sqrt{51,5 - 26,5} = 78 \cdot \sqrt{25} = 5 \cdot 78 = 390.$$

$$3. \sqrt{\left(\frac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41\right) : (133,5^2 - 58,5^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(79 - 41)(79^2 + 79 \cdot 41 + 41^2)}{38} + 79 \cdot 41 \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{(133,5 + 58,5)(133,5 - 58,5)}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(79^2 + 2 \cdot 79 \cdot 41 + 41^2) \frac{1}{192 \cdot 75}} = \\
 &= \sqrt{\frac{(79 + 41)^2}{64 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25}} = \frac{120}{8 \cdot 3 \cdot 5} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad &\sqrt{90 + \sqrt{\frac{31(57^2 - 26^2)}{83}}} = \sqrt{90 + \sqrt{\frac{31(57+26)(57-26)}{83}}} = \\
 &= \sqrt{90 + \sqrt{31 \cdot 31}} = \sqrt{90 + 31} = \sqrt{121} = 11.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad &\sqrt{\sqrt{1 \frac{1}{48} + \frac{1}{66} \sqrt{363}} - \frac{1}{68} \sqrt{158^2 - 131^2}} = \\
 &= \sqrt{\sqrt{\frac{49}{48} + \frac{1}{66} \sqrt{3 \cdot 121}} - \frac{1}{68} \sqrt{(158+131)(158-131)}} = \\
 &= \sqrt{\frac{7}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{11}{66} \sqrt{3} - \frac{1}{68} \sqrt{289 \cdot 27}} = \\
 &= \sqrt{\frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{6} \sqrt{3} - \frac{17 \cdot 3}{68} \sqrt{3}} = \\
 &= \sqrt{\sqrt{3} \left(\frac{7}{12} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} \right)} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot 0} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad &\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(7 - \sqrt{10})(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})}{36^2 - 28^2} = \\
 &\frac{27^2 + 2 \cdot 27 \cdot 5 + 5^2}{(36 - 28)(36 + 28)} \cdot (27 + 5)^2 = \\
 &= \frac{((\sqrt{5})^3 + (\sqrt{2})^3)((\sqrt{5})^3 - (\sqrt{2})^3)}{8 \cdot 64} \cdot 32^2 = \frac{(5^3 - 2^3) \cdot 32}{8 \cdot 2} = \\
 &= (125 - 8) \cdot 2 = 234.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad \frac{11(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}{12(3-2\sqrt{2})} &= \frac{11(\sqrt{3}(\sqrt{2}-1))^2}{12(2-2\sqrt{2}+1)} = \\
 &= \frac{11 \cdot 3(\sqrt{2}-1)^2}{12(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{11}{4} = 2,75.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \sqrt{\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{24}-\sqrt{8}}} &= \\
 &= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}(2+1))^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}} = \sqrt{3^2} = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{72}}{3(2\sqrt{6}-\sqrt{16})(\sqrt{16}+1)} &= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})6\sqrt{2}}{3(2\sqrt{6}-4)(4+1)} = \\
 &= \frac{(\sqrt{6}-2) \cdot 6}{6(\sqrt{6}-2) \cdot 5} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{60}-\sqrt{12}-\sqrt{45}+3)}{2-\sqrt{3}} &= \\
 &= \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(2\sqrt{15}-2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+3)}{2-\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(2(\sqrt{15}-\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3}))}{2-\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \\
 &= (\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3}) = 15-3 = 12.
 \end{aligned}$$

Решение проверочной работы 2

Упростите:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \\
 & = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2 + 4\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \\
 & = \frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1+4\sqrt{x}(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \\
 & = \frac{4\sqrt{x}(1+x-1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x}} = \\
 & = 4x \quad \text{при} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \left(\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{\sqrt{x^2-4}+x} - \frac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}-x} \right) : \sqrt{\frac{x^2-4}{x}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{x^2-4}-x)^2 - (\sqrt{x^2-4}+x)^2}{(\sqrt{x^2-4}+x)(\sqrt{x^2-4}-x)} \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \\
 & = \frac{x^2-4-2x\sqrt{x^2-4}+x^2-x^2+4-2x\sqrt{x^2-4}-x^2}{x^2-4-x^2} \times \\
 & \quad \times \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \frac{-4x\sqrt{x^2-4}}{-4} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}} = x\sqrt{x} \quad \text{при} \quad x > 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - (x+y) \right) \cdot \sqrt{xy} = \\
 & = \left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - (x+y) \right) \cdot \sqrt{xy} = \\
 & = (x+\sqrt{xy}+y-x-y) \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy} = xy \quad \text{при} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x \neq y. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. & \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (2\sqrt{a})^2}{a - b} - (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1} \right) : \frac{4(\sqrt{a})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\
& = \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2\sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4(\sqrt{a})^3} = \\
& = \left(\frac{(3\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4(\sqrt{a})^3} = \\
& = - \left(\frac{3\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \\
& = - \frac{3\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \\
& = - \frac{4\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})4a\sqrt{a}} = -\frac{1}{a} \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. & \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1+x} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} \right) = \\
& = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \right) \times \\
& \quad \times \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} - \frac{1}{x} \right) = \\
& = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = \\
& = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = \\
& = \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{1+x-1+x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{1-x^2})}{2x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = A, \text{ где}$$

$$A = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 < x < 1, \\ \frac{x^2 - 2\sqrt{1-x^2} - 2}{x^2} & \text{при } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

а) При $0 < x \leq x$ $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) =$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{1-x^2-1}{x^2} = -1.$$

б) При $-1 \leq x < 0$ $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) =$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \right) =$$

$$= -\frac{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}+1}{x^2} = \frac{x^2-2\sqrt{1-x^2}-2}{x^2}.$$

6. $\left(\frac{4a - \frac{9}{a}}{2\sqrt{a} - \frac{3}{\sqrt{a}}} + \frac{a - 4 + \frac{3}{a}}{\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}} \right)^2 =$

$$= \left(\frac{\frac{4a^2-9}{a}}{\frac{2a-3}{\sqrt{a}}} + \frac{\frac{a^2-4a+3}{a}}{\frac{a-1}{\sqrt{a}}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(2a+3)(2a-3)}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2a-3} + \frac{(a-1)(a-3)}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a-1} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2a+3}{\sqrt{a}} + \frac{a-3}{\sqrt{a}} \right)^2 = \left(\frac{2a+3+a-3}{\sqrt{a}} \right)^2 = \left(\frac{3a}{\sqrt{a}} \right)^2 =$$

$$= (3\sqrt{a})^2 = 9a \quad \text{при} \quad \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 1,5. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
7. & \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - b)} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a - b} = \\
& = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - b)} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a - b} = \\
& = \frac{a - \sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a - b} = \\
& = \frac{a - \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\
& = \frac{a - \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ba} - 2b - \sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\
& = \frac{a - b}{a - b} = 1 \quad \text{при} \quad \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a \neq b. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. & \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4 - 8x}}{\frac{x-2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x-2} \cdot \sqrt{x} = \\
& = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} \cdot \sqrt{x} = \frac{|x-2| \cdot \sqrt{x}}{x-2} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 2 \\ -\sqrt{x}, & 0 < x < 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

9. При $x > a > 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} \right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \\
& = \sqrt{x-a} \left(\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{1}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} \right) : \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}} = \\
& = \frac{\sqrt{x-a} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})}{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{x^2 - a^2}} = \\
& = \frac{\sqrt{x-a} \cdot 2\sqrt{x+a}}{x+a - x+a} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{x^2 - a^2}} = \\
& = \frac{2\sqrt{x^2 - a^2} \cdot |a|}{2a\sqrt{x^2 - a^2}} = A, \quad \text{где} \quad A = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2(ab^{-1}+1)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-ba^{-1}}{1+ba^{-1}}} = \\
& = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\left(\frac{a+b}{b}\right)^2} \cdot \frac{1+ba^{-1}}{1+ba^{-1}+1-ba^{-1}} = \\
& = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{2a\sqrt{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{a}}{(a+b)^2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}(a+b)}{(a+b)^2 \cdot 2a} = \\
& = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = \sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = \\
& = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = A,
\end{aligned}$$

$$\text{где } A = \begin{cases} 2\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}, & a \geq b > -a, \\ 0, & a \leq b < -a. \end{cases}$$

Можно записать по другому.

$$\text{Если } \begin{cases} a^2 - b^2 \geq 0, \\ a + b > 0, \end{cases} \text{ то } a \geq |b|, \quad a \neq -b,$$

$$\text{тогда } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = 2\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

$$\text{Если } \begin{cases} a^2 - b^2 \geq 0, \\ a + b < 0, \end{cases} \text{ то } a \leq -|b|, \quad a \neq -b,$$

$$\text{тогда } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = 0.$$

Решение проверочной работы 3

Вычислите:

$$1. \frac{18^2 \cdot 12^3 \cdot 8^2}{24^3 \cdot 6^2} = \frac{(2 \cdot 3^2)^2 (2^2 \cdot 3)^3 (2^3)^2}{(2^3 \cdot 3)^3 (2 \cdot 3)^2} = \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^6}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \\ = \frac{2^{14} \cdot 3^7}{2^{11} \cdot 3^5} = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

$$2. \frac{72^3 \cdot 48^3}{36^5 \cdot 16^3} = \frac{(2^3 \cdot 3^2)^3 (2^4 \cdot 3)^3}{(2^2 \cdot 3^2)^5 (2^4)^3} = \frac{2^9 \cdot 3^6 \cdot 2^{12} \cdot 3^3}{2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^{12}} = \\ = \frac{2^{21} \cdot 3^9}{2^{22} \cdot 3^{10}} = \frac{1}{6}.$$

$$3. \frac{(9 \cdot 16^{n-1} + 16^n)^2}{(4^{n-1} + 4^{n-2})^4} = \frac{(16^{n-1} (9 + 16))^2}{(4^{n-2} (4^{n-1-n+2} + 1))^4} = \frac{16^{2n-2} \cdot 25^2}{4^{4n-8} \cdot 5^4} = \\ = \frac{(4^2)^{2n-2} \cdot (5^2)^2}{4^{4n-8} \cdot 5^4} = \frac{4^{4n-4} \cdot 5^4}{4^{4n-8} \cdot 5^4} = 4^{4n-4-4n+8} = 4^4 = 256.$$

$$4. \left(\frac{7^4}{15^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \frac{7^{12} \cdot 5^6 \cdot 3^5}{15^6 \cdot 7^6 \cdot 7^5} = \frac{7^{12} \cdot 5^6 \cdot 3^5}{7^{11} \cdot 5^6 \cdot 3^6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

$$5. \frac{(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}) \cdot 57}{(19 \cdot 27^4)^2} = \frac{3^{21} (4 \cdot 3 + 7) \cdot 3 \cdot 19}{19^2 \cdot 27^8} = \\ = \frac{3^{22}}{(3^3)^8} = \frac{3^{22}}{3^{24}} = \frac{1}{9}.$$

$$6. \frac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}} = \frac{5 \cdot 7^{14} (3 \cdot 7 - 19)}{7^{15} (7 + 3)} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 10} = \frac{1}{7}.$$

$$7. \frac{6 \cdot 2^8 - 9 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^{12}}{4 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 2^{12} - 8 \cdot 2^{11}} = \\ = \frac{2^8 (6 - 9 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4)}{4 \cdot 2^{10} (1 + 2^2 - 2 \cdot 2)} = \frac{6 - 36 + 48}{4 \cdot 2^2} = \\ = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & (3^{n+2} - 2 \cdot 3^n) : 3^{n-1} - 36^{n+1} : 6^{2n-1} = \\
 & = 3^{n+2-n+1} - 2 \cdot 3^{n-n+1} - 6^{2n+2} : 6^{2n-1} = 3^3 - 2 \cdot 3 - 6^{2n+2-2n+1} = \\
 & = 27 - 6 - 6^3 = 21 - 216 = -195.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \text{Упростите } \frac{a^{3n} - a^{n-2}}{a^{2n-2} - a^{n-3}} = \\
 & = \frac{a^{n-2} (a^{3n-n+2} - 1)}{a^{n-3} (a^{2n-2-n+3} - 1)} = a \cdot \frac{a^{2n+2} - 1}{a^{n+1} - 1} = \\
 & = a \cdot \frac{(a^{n+1} + 1)(a^{n+1} - 1)}{a^{n+1} - 1} = a(a^{n+1} + 1) = a^{n+2} + a.
 \end{aligned}$$

10. Сравните числа:

а) 75^{10} и 15^{15} .

$$\begin{aligned}
 75^{10} - 15^{15} &= 5^{10} \cdot 15^{10} - 15^{15} = 15^{10} (5^{10} - 15^5) = \\
 &= 15^{10} \cdot 5^5 (5^5 - 3^5) > 0, \\
 \text{то есть } 75^{10} &> 15^{15}.
 \end{aligned}$$

б) 200^6 и 14^{12} .

$$\begin{aligned}
 200^6 - 14^{12} &= 200^6 - 196^6 > 0, \\
 \text{так как } 200 > 196, \text{ то есть } 200^6 &> 14^{12}.
 \end{aligned}$$

Решение проверочной работы 4

Вычислите:

$$1. 3 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 3(2^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}.$$

$$2. 64^{-\frac{1}{2}} = (8^2)^{-\frac{1}{2}} = 8^{-1} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

$$3. 2 \cdot 243^{-\frac{1}{5}} = 2 \cdot (3^5)^{-\frac{1}{5}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

$$4. \sqrt[3]{200 \cdot 45 \cdot 24} = \sqrt[3]{10^2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3} = 10 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{60}.$$

$$5. (5\sqrt{2,7})^2 - \sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,15} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = 25 \cdot 2,7 - \sqrt{2,4 \cdot 0,15} + \sqrt{\frac{3}{27}} = 67,5 - \sqrt{3 \cdot 0,4 \cdot 0,3} + \sqrt{\frac{1}{9}} = 67,5 - 3 \cdot 0,2 + \frac{1}{3} = \boxed{67\frac{7}{30}}.$$

$$6. 36^{\frac{3}{2}} + 64^{\frac{2}{3}} - 625^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{3}{2}} + (4^3)^{\frac{2}{3}} - (25^2)^{\frac{1}{2}} = 6^3 + 4^2 - 25 = 216 + 16 - 25 = \boxed{207}.$$

$$7. (0,04)^{-1,5} \cdot (0,125)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - (121)^{\frac{1}{2}} = (5^{-2})^{-\frac{3}{2}} \cdot (2^{-3})^{-\frac{1}{3}} - 11 = 5^3 \cdot 2 - 11 = 239.$$

$$8. \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{27} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \sqrt[6]{37}.$$

$$9. \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[10]{4} = 2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2.$$

$$10. 16^{0,5} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4 + (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} - 1 = 3 + 2^3 = 3 + 8 = 11.$$

$$11. 0,008^{-\frac{2}{3}} + 0,064^{-\frac{1}{3}} - 0,0625^{-\frac{3}{4}} = ((0,2)^3)^{-\frac{2}{3}} + ((0,4)^3)^{-\frac{1}{3}} - ((0,5)^4)^{-\frac{3}{4}} = 0,2^{-2} + 0,4^{-1} - 0,5^{-3} = 5^2 + \frac{5}{2} - 2^3 = 25 + 2,5 - 8 = 19,5.$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad & 0,25^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 0,0081^{-0,25} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = \\
 & = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 3 \cdot [(0,3)^4]^{-0,25} + (2^{-4})^{-0,75} = \\
 & = 8 + 3 \cdot (0,3)^{-1} + 2^3 = 16 + 3 \cdot \frac{10}{3} = 26.
 \end{aligned}$$

Упростите:

$$13. \quad b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = b^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \boxed{b^{\frac{1}{4}}}.$$

$$14. \quad \frac{c^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{1}{6}}} = c^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \boxed{c^{\frac{5}{4}}}.$$

$$15. \quad \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = \boxed{x}.$$

$$16. \quad \frac{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot c^{-\frac{7}{3}}}{c^{-\frac{4}{3}}} = c^{3 - \frac{7}{3} + \frac{4}{3}} = \boxed{c^2}.$$

Выполните действия:

$$17. \quad x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = \boxed{x^3}; \quad x > 0.$$

$$18. \quad y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} = \boxed{y^2}.$$

$$\begin{aligned}
 19. \quad & (\sqrt{3} - 2) \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^{-2}} = -\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2 (\sqrt{3} - 2)^{-2}} = \\
 & = -\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^0} = -\sqrt{1} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

$$20. \quad \sqrt[4]{a^4 \sqrt{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}} = (a \cdot (a)^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{16}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{5}{16}} = a^{\frac{1}{2}}; \quad a > 0.$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad & \sqrt{a^3 \sqrt{a^{-2}}} : a^{-\frac{1}{6}} = (a \cdot (a)^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{1}{6}} = \\
 & = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}; \quad a > 0.
 \end{aligned}$$

$$22. \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}: \sqrt[8]{a^{-1}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} : a^{-\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = a; \quad a > 0.$$

$$23. \sqrt{\frac{x^{-2}\sqrt{x^3}}{a^{-1}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{a^{-3}}} = \sqrt{ax^{-2} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot a} = \sqrt{a^2 x^{-2+1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}} = \\ = ax^{-1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}} = ax^{-\frac{1}{12}}; \quad a > 0, \quad x > 0.$$

$$24. \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{-\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{1}{2}} \\ (x > 0).$$

Сократите дробь:

$$25. \frac{5x^{\frac{1}{2}} + x}{5 + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(5 + x^{\frac{1}{2}})}{5 + x^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}.$$

$$26. \frac{1 - a}{1 + a^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1 - a^{\frac{1}{2}})(1 + a^{\frac{1}{2}})}{1 + a^{\frac{1}{2}}} = \boxed{1 - a^{\frac{1}{2}}}.$$

$$27. \frac{2y^{\frac{1}{2}} - y}{4 - y} = \frac{y^{\frac{1}{2}}(2 - y^{\frac{1}{2}})}{(2 - y^{\frac{1}{2}})(2 + y^{\frac{1}{2}})} = \boxed{\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2 + y^{\frac{1}{2}}}}.$$

$$28. \frac{m + n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} = \frac{(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}})(m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}})}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} = \\ = \boxed{\frac{1}{m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}}.$$

$$29. \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{6}}.$$

$$30. \frac{36 + x}{6 - \sqrt{-x}} = \frac{36 - (\sqrt{-x})^2}{6 - \sqrt{-x}} = \frac{(6 + \sqrt{-x})(6 - \sqrt{-x})}{6 - \sqrt{-x}} = \\ = \boxed{6 + \sqrt{-x}}.$$

Решение проверочной работы 5

Вычислите:

$$1. (-0,2)^0 \cdot \left(\left(\frac{5}{6} \right)^4 \right)^{-0,25} \cdot 1,2^{-1} \cdot \sqrt{0,01^{-3}} =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{-1} \left(\frac{6}{5} \right)^{-1} \left(\frac{1}{10} \right)^{-3} = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} \right)^{-1} \cdot 10^3 = 1000.$$

$$2. \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{-4} \right)^{-0,75} \cdot 0,09^{-0,5} \cdot (-3)^0 \cdot \sqrt{0,1^{-8}} =$$

$$= \left(\frac{3}{5} \right)^3 \cdot (0,3^2)^{-0,5} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^{-4} = \frac{27}{125} \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^{-1} \cdot 10^4 =$$

$$= \frac{27}{125} \cdot \frac{10}{3} \cdot 10^4 = 8 \cdot 9 \cdot 100 = 7200.$$

$$3. \left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{0,5^{-1}} \right) \cdot \left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{0,5^{-1}} \right) =$$

$$= (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{0,5^{-2}} = 3^{-2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{36}.$$

$$4. \frac{(\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{81})(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2}{5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}} =$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 3})(3\sqrt{2} - \sqrt{2})^2}{5(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})} =$$

$$= \frac{3(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(2\sqrt{2})^2}{5(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})} = \frac{3}{5} \cdot 8 = 4,8.$$

$$5. \frac{(3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})}{(\sqrt{15} - \sqrt{10})^2 (2\sqrt{15} + 2\sqrt{10})^2} =$$

$$= \frac{3(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{7^2} - \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt{15} - \sqrt{10})^2 \cdot 2^2 \cdot (\sqrt{15} + \sqrt{10})^2}.$$

Следует помнить, что $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, где в данном случае $a = \sqrt[3]{7}$, $b = \sqrt[3]{3}$. Последнее выражение преобразуется к виду

$$\frac{3 \left((\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 \right)}{\left((\sqrt{15} - \sqrt{10}) (\sqrt{15} + \sqrt{10}) \right)^2 \cdot 4} = \frac{3 \cdot (7 + 3)}{(15 - 10)^2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{30}{25 \cdot 4} = \frac{3}{10}.$$

$$6. \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}) (\sqrt{18} + \sqrt{2})^2}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{56}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}) (3\sqrt{2} + \sqrt{2})^2}{\sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{8 \cdot 7}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}) (4\sqrt{2})^2}{2(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7})}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 2}{2}} = 4.$$

Выполните действия:

$$7. \left(\frac{a^{\frac{1}{2}+1} + a^{\frac{1}{2}-1} - 4}{a^{\frac{1}{2}-1} + a^{\frac{1}{2}+1} - a-1} \right)^{-3} = \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2 + (\sqrt{a}-1)^2 - 4}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right)^{-3} =$$

$$= \left(\frac{2a + 2 - 4}{a - 1} \right)^{-3} = \left(\frac{2(a-1)}{a-1} \right)^{-3} = \frac{1}{8}.$$

$$8. \left(\frac{a}{b^{\frac{5}{4}}} - \frac{a^{\frac{3}{4}}}{b} \right) \cdot (b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})^{-1} = \frac{a - a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}} \cdot \left(\frac{1}{b^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{a^{\frac{3}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})}{b^{\frac{5}{4}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{b} = \frac{a}{b}.$$

$$9. \left(\frac{2+x^{\frac{1}{4}}}{2-x^{\frac{1}{4}}} - \frac{2-x^{\frac{1}{4}}}{2+x^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{(2+x^{\frac{1}{4}})^2 - (2-x^{\frac{1}{4}})^2}{(2-x^{\frac{1}{4}})(2+x^{\frac{1}{4}})} \cdot \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} =$$

$$= \frac{8x^{\frac{1}{4}}}{4-\sqrt{x}} \cdot \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{8}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{8}{\sqrt{x}} = \frac{8\sqrt{x}}{x}.$$

$$10. \left(\frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - (x+y) \right) \cdot \sqrt{xy} =$$

$$= \left(\frac{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x + x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} + y)}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - x - y \right) \cdot \sqrt{xy} =$$

$$= (x + \sqrt{xy} + y - x - y) \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy} = xy.$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & \left(\frac{p^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{3}{2}}}{p - q} - \frac{p - q}{p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot (\sqrt{pq})^{-1} = \\
& = \left(\frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})(p - \sqrt{pq} + q)}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})(\sqrt{p} - \sqrt{q})} - \frac{(\sqrt{p} - \sqrt{q})(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{pq}} = \\
& = \left(\frac{p - \sqrt{pq} + q}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} - (\sqrt{p} - \sqrt{q}) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{pq}} = \\
& = \frac{p - \sqrt{pq} + q - (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{pq}} = \\
& = \frac{p - \sqrt{pq} + q - p + 2\sqrt{pq} - q}{(\sqrt{p} - \sqrt{q}) \cdot \sqrt{pq}} = \\
& = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{pq}} = \frac{1}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & \left((m + n)(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}})^{-1} + (m \cdot n)^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{1}{(m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}})^{-1}} = \\
& = \left(\frac{m + n}{m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}} + (mn)^{\frac{1}{3}} \right) \cdot (m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}) = \\
& = \left(m^{\frac{2}{3}} - (mn)^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}} + (mn)^{\frac{1}{3}} \right) \cdot (m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}) = \\
& = (m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}) \cdot (m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}) = m^{\frac{4}{3}} - n^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad & \left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} + (xy)^{\frac{1}{2}} \right) : (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = \\
& = \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \\
& = (x + \sqrt{xy} + y + \sqrt{xy}) : (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \\
& = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 : (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad & \left(\frac{a^2 - b^2}{a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{1}{2}}} - \frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right) : \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} = \frac{a^2 - b^2 - a(a - b)}{a(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} : \frac{b}{a} = \\
 & = \frac{-b^2 + ab}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b(a - b)}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{b} = \\
 & = \frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}.
 \end{aligned}$$

15. При $-1 < a < 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 & (a + 1)^{0,25} \cdot \frac{\sqrt[4]{(1 - 2a + a^2)(1 - a^2)(1 - a)}}{a^2 + 2a - 3} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3} = \\
 & = \sqrt[4]{a + 1} \cdot \frac{\sqrt[4]{(1 - a)^2(1 - a^2)(1 - a)}}{(a - 1)(a + 3)} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3} = \\
 & = \sqrt[4]{a + 1} \cdot \frac{\sqrt[4]{(1 - a)^4(1 + a)}}{(a - 1)(a + 3)} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3} = \\
 & = \frac{|1 - a| \sqrt[4]{a + 1} \sqrt[4]{1 + a}}{(a - 1)(a + 3)} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3};
 \end{aligned}$$

$$|1 - a| = \begin{cases} a - 1 & \text{при } a > 1, \\ 1 - a & \text{при } a < 1, \end{cases}$$

тогда

$$\frac{\sqrt{a + 1} \cdot (1 - a)}{(a - 1)(a + 3)} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3} = -\frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3} - a + \frac{\sqrt{a + 1}}{a + 3} = -a.$$

Решение зачетных карточек

Решение зачетной карточки 1

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
& \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} = \\
& = \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{2}{3} - (-\frac{1}{3})} - 3 \right)} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)} - \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \\
& = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \\
& = \frac{2(x-1) - x + 3 - x - 1}{(x-1)(x-3)} = \\
& = \frac{2x - 2 - x + 3 - x - 1}{(x-1)(x-3)} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. & \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = \\
& = \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \right) = \\
& = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - x + 1} + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1 - x} \right) = \\
& = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \\
& = \sqrt{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \text{ при } x > 1.
\end{aligned}$$

$$3. A = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \text{при} \begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \end{cases} \\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} & \text{при} \begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases} \end{cases}$$

а) При $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}} \right)^2} = \sqrt{\frac{4ab + (a-b)^2}{4ab}} = \\ = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab}} = \frac{|a+b|}{2\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$A = \frac{2a \cdot \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}} + \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2a(a+b)}{a-b+a+b} = a+b.$$

б) При $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases}$

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} - \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}} \right) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{-a})^2 - (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{b-a}{2\sqrt{ab}} \right)^2} = \sqrt{\frac{4ab + (b-a)^2}{4ab}} = \\ = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab}} = \frac{|a+b|}{2\sqrt{ab}} = -\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

$$A = \frac{2a \cdot \frac{-a-b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{b-a}{2\sqrt{ab}} + \frac{-a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{-2a(a+b)}{b-a-a-b} = a+b.$$

$A = a + b$ при $ab > 0$.

$$\begin{aligned} 4. \quad & \frac{3}{y-1} + \left(\frac{y^{-\frac{1}{3}} - 1}{y^{-\frac{1}{3}} + 1} \right)^2 \left(\frac{y}{y-1} + \frac{4y}{(1-y^{\frac{1}{3}})^3} \right) = \\ & = \frac{3}{y-1} + \left(\frac{y^{-\frac{1}{3}}(1-y^{\frac{1}{3}})}{y^{-\frac{1}{3}}(1+y^{\frac{1}{3}})} \right)^2 \cdot y \cdot \frac{-(1-y^{\frac{1}{3}})^2 + 4(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1)}{(1-y^{\frac{1}{3}})^3(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1)} = \\ & = \frac{3}{y-1} + \frac{(1-y^{\frac{1}{3}})^2 \cdot y}{(1+y^{\frac{1}{3}})^2} \cdot \frac{-1 + 2y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{1}{3}} + 4}{(1-y^{\frac{1}{3}})^2(1-y)} = \\ & = \frac{3}{y-1} + \frac{(1-y^{\frac{1}{3}})^2 \cdot y}{(1+y^{\frac{1}{3}})^2} \cdot \frac{3y^{\frac{2}{3}} + 6y^{\frac{1}{3}} + 3}{(1-y)(1-y^{\frac{1}{3}})^2} = \\ & = \frac{3}{y-1} + \frac{(1-y^{\frac{1}{3}})^2 \cdot y \cdot 3(y^{\frac{1}{3}} + 1)^2}{(1+y^{\frac{1}{3}})^2(1-y)(1-y^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{3}{y-1} - \frac{3y}{y-1} = \\ & = \frac{3-3y}{y-1} = \frac{3(1-y)}{y-1} = -3. \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 2

1. Упростите при $p \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{(2p+1)^3} + \sqrt{8p^3 - 12p^2 + 6p - 1}}{\sqrt{4p + 2\sqrt{4p^2 - 1}}} = \\
 & = \frac{\sqrt{(2p+1)^3} + \sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{2p+1 + 2\sqrt{(2p+1)(2p-1)} + 2p-1}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{2p+1})^3 + (\sqrt{2p-1})^3}{\sqrt{(\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p-1})^2}} = \\
 & = \frac{(\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p-1}) \left(2p+1 - \sqrt{(2p+1)(2p-1)} + 2p-1 \right)}{|\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p-1}|} = \\
 & = \frac{(\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p-1})(4p - \sqrt{4p^2 - 1})}{(\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p-1})} = 4p - \sqrt{4p^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

2. Проверьте: $\sqrt[3]{\frac{10 - 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

По утверждению должно быть $\frac{10 - 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^3$.

$$L = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} \cdot 1 - 1}{(\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} \cdot 1 + 1} = \\
 &= \frac{2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} + 1} = \frac{5\sqrt{2} - 7}{5\sqrt{2} + 7} = \\
 &= \frac{(5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} - 7)}{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)} = \frac{50 - 70\sqrt{2} + 49}{50 - 49} = \\
 &= 99 - 70\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$L = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}} = \frac{(10 - 7\sqrt{2})(10 - 7\sqrt{2})}{(10 + 7\sqrt{2})(10 - 7\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{100 - 140\sqrt{2} + 98}{100 - 98} = 99 - 70\sqrt{2}.$$

Итак, $L = 99 - 70\sqrt{2}$,
 $M = 99 - 70\sqrt{2}$, т.е. $L = M$,

что и требовалось доказать.

$$3. A = \left(\frac{b-1}{\sqrt{1-b^2} - 1 + b} + \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1-b}{b} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1} \right) \cdot \frac{b}{1-b + \sqrt{1-b^2}} =$$

$$= \left(\frac{-(\sqrt{1-b})^2}{\sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1+b} - (\sqrt{1-b})^2} + \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1-b}{b} + \sqrt{\frac{1-b^2}{b^2}} \right) \cdot \frac{b}{(\sqrt{1-b})^2 + \sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1+b}} =$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} + \frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1-b}{b} + \frac{\sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1+b}}{|b|} \right) \cdot \frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b} + \sqrt{1+b})} =$$

$$\left(\frac{-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} + \frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} = \frac{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}} = 1 \right)$$

$$= \left(\frac{1-b}{b} + \frac{\sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1+b}}{|b|} \right) \cdot \frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b} + \sqrt{1+b})} = A.$$

а) При $\begin{cases} b > 0, \\ b < 1 \end{cases}$

$$A = \frac{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b} + \sqrt{1+b})}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b} + \sqrt{1+b})} = 1.$$

б) При $\begin{cases} b < 0, \\ b \geq -1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b}-\sqrt{1+b})}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{1-b}(\sqrt{1-b}+\sqrt{1+b})} = \\ &= \frac{(\sqrt{1-b}-\sqrt{1+b})(\sqrt{1-b}-\sqrt{1+b})}{1-b-1-b} = \\ &= \frac{1-b-2\sqrt{1-b^2}+1+b}{-2b} = \frac{\sqrt{1-b^2}-1}{b}. \end{aligned}$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < b < 1, \\ \frac{\sqrt{1-b^2}-1}{b} & \text{при } -1 \leq b < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \frac{1}{2\sqrt{2}b+1} + \left(\frac{(2\sqrt[3]{b^2}-1)^2}{8b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt{2}b \cdot \sqrt[3]{b^2}} \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{6}{1-8b^2} + \frac{1}{2b \cdot \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}b^{\frac{1}{3}})^3 + 1} + \frac{2\sqrt{2} \cdot b \cdot \sqrt[3]{b^2}(2\sqrt{2}b-1)}{(2\sqrt[3]{b^2}-1)^2} \times \\ & \times \left(\frac{6}{(1-2b^{\frac{2}{3}})(1+2b^{\frac{2}{3}}+4b^{\frac{4}{3}})} + \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{2}{3}}-1)} \right) = \\ &= \frac{1}{(2^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}})^3 + 1} + \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{5}{3}}(2^{\frac{3}{2}}b-1)}{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2} \cdot \frac{6 \cdot b^{\frac{2}{3}} - 1 - 2b^{\frac{2}{3}} - 4b^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}(1-2b^{\frac{2}{3}})(1+2b^{\frac{2}{3}}+4b^{\frac{4}{3}})} = \\ &= \frac{1}{(2^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}})^3 + 1} + \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{5}{3}}(2^{\frac{3}{2}}b-1) \cdot (-1)(1-2b^{\frac{2}{3}})^2}{(2b^{\frac{2}{3}}-1)^2 \cdot b^{\frac{2}{3}}(1-8b^2)} = \\ &= \frac{1}{2^{1,5} \cdot b + 1} + \frac{2^{1,5} \cdot b(1-2^{1,5}b)}{(1-2^{1,5}b)(1+2^{1,5}b)} = \frac{1+2^{1,5}b}{1+2^{1,5}b} = 1. \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 3

Упростите:

1. При $b > 2$ имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{b^2 - 3b - (b-1)\sqrt{b^2-4} + 2}{b^2 + 3b - (b+1)\sqrt{b^2-4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}} = \\
&= \frac{(b-1)(b-2) - (b-1) \cdot \sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}}{(b+1)(b+2) - (b+1) \cdot \sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}} \cdot \frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}} = \\
&= \frac{(b-1)}{b+1} \cdot \frac{(\sqrt{b-2})^2 - \sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}}{(\sqrt{b+2})^2 - \sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}} \cdot \frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}} = \\
&= \frac{b-1}{b+1} \cdot \frac{\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}} \cdot \frac{\sqrt{b-2} - \sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2} - \sqrt{b-2}} \cdot \frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}} = -\frac{b-1}{b+1} = \frac{1-b}{1+b}.
\end{aligned}$$

2. При $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$ имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}} - \frac{\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{y}} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}} + \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{y}-1} \right)^2 = \\
&= \left(\frac{(1+\sqrt{y})^2 - (\sqrt{1+y})^2}{\sqrt{1+y} \cdot (1+\sqrt{y})} \right)^2 - \left(\frac{(\sqrt{1+y})^2 - (\sqrt{y}-1)^2}{\sqrt{1+y} \cdot (\sqrt{y}-1)} \right)^2 = \\
&= \frac{(1+2\sqrt{y}+y-1-y)^2}{(1+y)(1+\sqrt{y})^2} - \frac{(1+y-y+2\sqrt{y}-1)^2}{(1+y)(\sqrt{y}-1)^2} = \\
&= \frac{4y}{(1+y)(1+\sqrt{y})^2} - \frac{4y}{(1+y)(\sqrt{y}-1)^2} = \\
&= \frac{4y}{1+y} \left(\frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} - \frac{1}{(\sqrt{y}-1)^2} \right) = \\
&= \frac{4y}{1+y} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1)^2 - (1+\sqrt{y})^2}{((1+\sqrt{y})(\sqrt{y}-1))^2} = \\
&= \frac{4y}{1+y} \cdot \frac{(\sqrt{y}-1+1+\sqrt{y})(\sqrt{y}-1-1-\sqrt{y})}{(y-1)^2} = \\
&= \frac{4y}{1+y} \cdot \frac{2\sqrt{y} \cdot (-2)}{(y-1)^2} = -\frac{16y\sqrt{y}}{(y+1)(y-1)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \sqrt[3]{15\sqrt{3} + 26} \cdot (\sqrt{3} - 2) = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3 \cdot (15\sqrt{3} + 26)} = \\
& = \sqrt[3]{((\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 \cdot 2 + 3\sqrt{3} \cdot 2^2 - 2^3)(15\sqrt{3} + 26)} = \\
& = \sqrt[3]{(3\sqrt{3} - 18 + 12\sqrt{3} - 8)(15\sqrt{3} + 26)} = \\
& = \sqrt[3]{(15\sqrt{3} - 26)(15\sqrt{3} + 26)} = \\
& = + \sqrt[3]{(15\sqrt{3})^2 - 26^2} = \sqrt[3]{225 \cdot 3 - 676} = \\
& = \sqrt[3]{675 - 676} = \sqrt[3]{-1} = -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad A &= \frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4} + 2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} - 2} = \frac{\sqrt{x-4-2 \cdot 2\sqrt{x-4} + 4} + 2}{\sqrt{x-4+2 \cdot 2\sqrt{x-4} + 4} - 2} = \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} + 2}{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} - 2} = \\
&= \frac{|\sqrt{x-4}-2| + 2}{|\sqrt{x-4}+2| - 2} = \frac{|\sqrt{x-4}-2| + 2}{\sqrt{x-4}}.
\end{aligned}$$

$$|\sqrt{x-4}-2| = \begin{cases} \sqrt{x-4}-2 & \text{при } \sqrt{x-4} \geq 2, \\ 2-\sqrt{x-4} & \text{при } \sqrt{x-4} < 2 \end{cases}$$

то есть

$$|\sqrt{x-4}-2| = \begin{cases} \sqrt{x-4}-2 & \text{при } x \geq 8, \\ 2-\sqrt{x-4} & \text{при } 4 \leq x < 8. \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 8, \\ \frac{4-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} & \text{при } 4 < x < 8; \quad \text{или} \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 8, \\ \frac{4}{\sqrt{x-4}} - 1 & \text{при } 4 < x < 8. \end{cases}$$

Решение зачетной карточки 4

Упростите:

$$\begin{aligned}
 1. & \left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}} \right) \left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + 2 \right) = \\
 & = \frac{(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3}+\sqrt{t}) + (\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{t})}{(1-\sqrt{3}+\sqrt{t})(1+\sqrt{3}+\sqrt{t})} \cdot \frac{t-2+2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \\
 & = \frac{\sqrt{3}+1-3-\sqrt{3}+\sqrt{3t}+\sqrt{t}+\sqrt{3}-1+3-\sqrt{3}+\sqrt{3t}-\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^2 - (\sqrt{3})^2} \times \\
 & \quad \times \frac{t+2\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}} = \\
 & = \frac{2\sqrt{3t}}{1+2\sqrt{t}+t-3} \cdot \frac{t+2\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}} = \\
 & = \frac{2\sqrt{3}(t+2\sqrt{t}-2)}{(t+2\sqrt{t}-2)} = 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. & \sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2} \right)} \sqrt{3} : (3 + \sqrt[6]{108}) = \\
 & = \sqrt{\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{3}{2}}-2)}{3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{3}}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)} \sqrt{3} : \left(3 + (3^3 \cdot 2^2)^{\frac{1}{6}} \right) = \\
 & = \sqrt{\left(3^{\frac{1}{2}}(3+3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}) + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)} \cdot 3^{\frac{1}{2}} : (3+3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) = \\
 & = \sqrt{3(3+3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}})} : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}}) \right) = \\
 & = \sqrt{3(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}})^2} : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}}) \right) = \\
 & = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}})}{3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}})} = 1.
 \end{aligned}$$

3. $b \geq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2} &= \frac{\sqrt{b+2+2\sqrt{(b+2)(b-2)}+b-2}}{\sqrt{(b+2)(b-2)}+(\sqrt{b+2})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{(b+2)}+\sqrt{b-2})^2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})} = \frac{|\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}|}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})} = \\ &= \frac{\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})} = \frac{1}{\sqrt{b+2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \left(\frac{9}{a+8} - \frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4} \right) \cdot \frac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}} + \frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}} &= \\ &= \left(\frac{9}{(a^{\frac{1}{3}}+2)(a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4)} - \frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}(a+8)}{1-a^{\frac{2}{3}}} + \frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{\left(9 - (a^{\frac{1}{3}}+2)^2\right) \cdot a^{\frac{1}{3}}(a+8)}{(a+8) \cdot (1-a^{\frac{1}{3}})(1+a^{\frac{1}{3}})} + \frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{(3+a^{\frac{1}{3}}+2)(3-a^{\frac{1}{3}}-2)a^{\frac{1}{3}}(a+8)}{(a+8)(1-a^{\frac{1}{3}})(1+a^{\frac{1}{3}})} + \frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{(5+a^{\frac{1}{3}})(1-a^{\frac{1}{3}})a^{\frac{1}{3}}}{(1-a^{\frac{1}{3}})(1+a^{\frac{1}{3}})} + \frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}} = \\ &= \frac{5a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}+5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}} = \frac{5(a^{\frac{1}{3}}+1)}{1+a^{\frac{1}{3}}} = 5. \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 5

$$\begin{aligned}
1. & \left(\frac{\sqrt[4]{8} + 2}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{4} \right) : \left(\frac{\sqrt[4]{8} - 2}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} - 3 \sqrt[12]{128} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \left(\frac{2^{\frac{3}{4}} + (2^{\frac{1}{3}})^3}{2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{3}}} - 2^{\frac{2}{3}} \right) : \left(\frac{2^{\frac{3}{4}} - (2^{\frac{1}{3}})^3}{2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}}} - 3 \cdot 2^{\frac{7}{12}} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = (2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}) : (2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \\
& = (2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}) : (2^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \\
& = 2^{\frac{1}{4}} (2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}}) : \left((2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = \frac{2^{\frac{1}{4}} (2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}})}{|2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}}|} = \frac{2^{\frac{1}{4}} (2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}})}{-(2^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{3}})} = -2^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. & (7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}} = \frac{(7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}} = \\
& = \frac{(7 - 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})} = \frac{(7 - 4\sqrt{3})(4 + 4\sqrt{3} + 3)}{\sqrt[3]{(26 - 15\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^3}} = \\
& = \frac{(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})}{\sqrt[3]{(26 - 15\sqrt{3})(8 + 3 \cdot 2^2\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3\sqrt{3})}} = \\
& = \frac{49 - 48}{\sqrt[3]{(26 - 15\sqrt{3}) \cdot (26 + 15\sqrt{3})}} = \\
& = \frac{1}{\sqrt[3]{26^2 - (15\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{676 - 225 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{676 - 675}} = 1.
\end{aligned}$$

$$3. A = \sqrt{\frac{2a + 2\sqrt{a^2 - 9}}{2a - 2\sqrt{a^2 - 9}}} = \sqrt{\frac{a + 3 + 2\sqrt{(a + 3)(a - 3)} + a - 3}{a + 3 - 2\sqrt{(a + 3)(a - 3)} + a - 3}}.$$

$$a + 3 = \begin{cases} (\sqrt{a+3})^2 & \text{при } a \geq -3, \\ -(\sqrt{-a-3})^2 & \text{при } a < -3; \end{cases}$$

$$a - 3 = \begin{cases} (\sqrt{a-3})^2 & \text{при } a \geq 3, \\ -(\sqrt{3-a})^2 & \text{при } a < 3. \end{cases}$$

$$\sqrt{a+3} \geq \sqrt{a-3} \quad \text{при } a \geq 3,$$

$$\sqrt{a+3} < \sqrt{a-3} \quad \text{решений нет.}$$

1) При $a \geq 3$

$$A = \sqrt{\frac{(\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3})^2}{(\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3})^2}} = \frac{|\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}|}{|\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}} = \frac{(\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3})^2}{a+3 - a+3} =$$

$$= \frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{3}.$$

2) При $a \leq -3$

$$\sqrt{-a-3} < \sqrt{3-a} \quad \text{при } a \leq -3,$$

$$\sqrt{-a-3} \geq \sqrt{3-a} \quad \text{решений нет.}$$

$$A = \sqrt{\frac{-((\sqrt{-a-3})^2 + 2\sqrt{-a-3} \cdot \sqrt{3-a} - (\sqrt{3-a})^2)}{-((\sqrt{-a-3})^2 - 2\sqrt{-a-3} \cdot \sqrt{3-a} - (\sqrt{3-a})^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{-a-3})^2 - 2\sqrt{-a-3} \cdot \sqrt{3-a} + (\sqrt{3-a})^2}{(\sqrt{-a-3})^2 + 2\sqrt{-a-3} \cdot \sqrt{3-a} + (\sqrt{3-a})^2}} =$$

$$= \frac{|\sqrt{-a-3} - \sqrt{3-a}|}{|\sqrt{-a-3} + \sqrt{3-a}|} = \frac{\sqrt{3-a} - \sqrt{-a-3}}{\sqrt{-a-3} + \sqrt{3-a}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3-a} - \sqrt{-a-3})^2}{-a+3+3+a} = \frac{3-a-2\sqrt{a^2-9}-a-3}{6} =$$

$$= -\frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{3}.$$

$$A = \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{3} & \text{при } a \in [3; +\infty), \\ -\frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{3} & \text{при } a \in (-\infty; -3]. \end{cases}$$

4. При $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0 \end{cases}$ имеем

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt[3]{a} - \left(\frac{b^2 - a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt[3]{a}} + b\sqrt[3]{a} \right) : (b + \sqrt[6]{b^3 \cdot a^2}) \right)^{-2} = \\
 & = \left(\sqrt[3]{a} - \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}} - a)}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}} + b \cdot \sqrt[3]{a} \right) : (b + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}) \right)^{-2} = \\
 & = \left(\sqrt[3]{a} - b^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}})(b + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{3}}} + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \right) \div \right. \\
 & \quad \left. \div \left(b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}) \right) \right)^{-2} = \\
 & = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}} \cdot (b + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}) \div \right. \\
 & \quad \left. \div \left(b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}) \right) \right)^{-2} = \\
 & = \left(a^{\frac{1}{3}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})^2}{b^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}})} \right)^{-2} = \\
 & = \left(a^{\frac{1}{3}} - (b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}) \right)^{-2} = (-b^{\frac{1}{2}})^{-2} = \frac{1}{b}.
 \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 6

$$\begin{aligned}
1. & \left(\frac{(1-ab)(\sqrt[3]{ab}-1)}{1+\sqrt{ab}} - (1-\sqrt[3]{ab})\sqrt{ab} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}} - 1 \right) = \\
& = \left(\frac{(\sqrt[3]{ab}-1)(1-\sqrt{ab})(1+\sqrt{ab})}{1+\sqrt{ab}} + (\sqrt[3]{ab}-1)\sqrt{ab} \right)^{-1} \times \\
& \quad \times \left(\frac{1+(\sqrt[3]{ab})^3}{1+\sqrt[3]{ab}} - 1 \right) = \\
& = \left((\sqrt[3]{ab}-1)(1-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}) \right)^{-1} \cdot (1-\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{ab})^2-1) = \\
& = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}-1} \left((\sqrt[3]{ab})^2 - \sqrt[3]{ab} \right) = \frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{ab}-1)}{\sqrt[3]{ab}-1} = \sqrt[3]{ab}.
\end{aligned}$$

$$2. \quad a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{ba^2} & \text{при } \begin{cases} b \geq 0, \\ a \geq 0; \end{cases} \\ -\sqrt{ba^2} & \text{при } \begin{cases} b \geq 0, \\ a < 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} \right) \cdot \sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} = \\
& = \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} = \\
& = -\sqrt[6]{(25+4\sqrt{6})(1-2\sqrt{6})^2} - \sqrt[3]{(1+2\sqrt{6}) \cdot (1-2\sqrt{6})} = \\
& = -\sqrt[6]{(25+4\sqrt{6})(25-4\sqrt{6})} - \sqrt[3]{1-24} = \\
& = -\sqrt[6]{625-96} - \sqrt[3]{-23} = -\sqrt[6]{529} + \sqrt[3]{23} = -\sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{23} = 0.
\end{aligned}$$

3. При $x = 4(a-1)$ имеем

$$A = (a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} + (a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}.$$

1) $a \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a+x^{\frac{1}{2}} &= a+\sqrt{4(a-1)}=a+2\sqrt{a-1}= \\
&= a-1+2\sqrt{a-1}+1=(\sqrt{a-1}+1)^2;
\end{aligned}$$

$$a - x^{\frac{1}{2}} = a - \sqrt{4(a-1)} = a - 2\sqrt{a-1} = \\ = a - 1 - 2\sqrt{a-1} + 1 = (\sqrt{a-1} - 1)^2;$$

$$\sqrt{a + x^{\frac{1}{2}}} = |\sqrt{a-1} + 1| = \sqrt{a-1} + 1;$$

$$\sqrt{a - x^{\frac{1}{2}}} = |\sqrt{a-1} - 1| = \begin{cases} \sqrt{a-1} - 1 & \text{при } a \geq 2, \\ 1 - \sqrt{a-1} & \text{при } \begin{cases} a < 2, \\ a \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

а) При $a \geq 2$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a-1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{a-1} - 1} = \\ = \frac{\sqrt{a-1} - 1 + \sqrt{a-1} + 1}{a - 1 - 1} = \frac{2\sqrt{a-1}}{a - 2}, \quad a \neq 2.$$

б) $1 \leq a < 2$,

$$A = \frac{1}{\sqrt{a-1} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{a-1}} = \\ = \frac{1 - \sqrt{a-1} + \sqrt{a-1} + 1}{1 - (a-1)} = \frac{2}{2-a}.$$

2) При $a < 1$ не существует \sqrt{x} .

$$A = \begin{cases} \frac{2\sqrt{a-1}}{a-2} & \text{при } a > 2, \\ \frac{2}{2-a} & \text{при } 1 \leq a < 2. \end{cases}$$

$$4. \left(\frac{a\sqrt{a} - a}{\left(\frac{a^{0,75}-1}{a^{0,25}-1} - \sqrt{a}\right) \left(\frac{a^{0,75}+1}{a^{0,25}+1} - \sqrt{a}\right)} \right)^3 + \\ + \left(\frac{(1 + \sqrt[3]{a}) : (a + \sqrt[3]{a^2}) - 1}{1 - \sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{a(\sqrt{a}-1)}{(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{2}})} \right)^3 + \\ &+ \left(\frac{(1+\sqrt[3]{a}) : (\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}+1)) - 1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} = \\ &= \left(\frac{a(\sqrt{a}-1)}{(a^{\frac{1}{4}}+1)(1-a^{\frac{1}{4}})} \right)^3 + \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} - 1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} = \\ &= \left(\frac{a(\sqrt{a}-1)}{1-a^{\frac{1}{2}}} \right)^3 + \left(\frac{(1-\sqrt[3]{a^2})}{\sqrt[3]{a^2}(1-\sqrt[3]{a})} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} = \\ &= (-a)^3 + \left(\frac{1+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-4,5} = \\ &= -a^3 + \left(\frac{1+\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \right)^{-4,5} = \\ &= -a^3 + (a^{-\frac{2}{3}})^{-4,5} = -a^3 + a^3 = 0. \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 7

$$1. A = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} \text{ при } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

$$\text{При } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0 \end{cases} \text{ имеем } \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{-a}{-b}},$$

значит

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{-a})^2 + (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{ab}} = -\frac{a+b}{2\sqrt{ab}};$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}} \right) \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2} = \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} - \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{(\sqrt{-a})^2 - (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{ab}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \right| = \\ &= \begin{cases} \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} & \text{при } 0 > b \geq a, \\ \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} & \text{при } b < a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{а) При } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ b \geq a \end{cases} A = \frac{2b \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(b-a)}{-a-b-b+a} = a-b.$$

$$\text{б) При } \begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ a > b \end{cases} A = \frac{2b \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b(a-b)}{-a-b-a+b} = \frac{b}{a}(b-a).$$

$$A = \begin{cases} a-b & \text{при } 0 > b \geq a, \\ \frac{b}{a}(b-a) & \text{при } 0 > a > b. \end{cases}$$

2. Упростите:

$$\begin{aligned}
& \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}}} \right) = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{4}} - (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}})} = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b} = \\
& = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) \cdot b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})} = \frac{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}} = 1.
\end{aligned}$$

3. Вычислите:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \right)^4 = \\
& = \left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}{2 - 2 - \sqrt{3}} + \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{2 - 2 + \sqrt{3}} \right)^4 = \\
& = \frac{1}{9} \left((2 + \sqrt{3}) \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2} \right) + (2 - \sqrt{3}) \left(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) \right)^4 = \\
& \left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}; \quad \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}; \\ 2 - \sqrt{3} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}; \quad \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}. \end{array} \right] \\
& = \frac{1}{9} \left(\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right) \right)^4 = \\
& = \frac{1}{9} \left(\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \right)^4 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \left(\frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} \right)^4 = \\
&= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \left((\sqrt{3}+1)(3-1) + (\sqrt{3}-1)(3-1) \right)^4 = \\
&= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 2^4 \cdot (\sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1)^4 = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot (2\sqrt{3})^4 = \\
&= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 2^4 \cdot 3^2 = 4.
\end{aligned}$$

4. Вычислите: $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{37-30\sqrt{3}}$.

Положим

$$\left. \begin{aligned}
\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} &= a; & 37+30\sqrt{3} &= a^3 \\
\sqrt[3]{37-30\sqrt{3}} &= b; & 37-30\sqrt{3} &= b^3
\end{aligned} \right\} \text{тогда } a^3 + b^3 = 74.$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 74,$$

$$\begin{aligned}
\text{но } a \cdot b &= \sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{37-30\sqrt{3}} = \sqrt[3]{37^2 - 30^2 \cdot 3} = \\
&= \sqrt[3]{1369 - 2700} = \sqrt[3]{-1331} = -\sqrt[3]{11^3} = -11
\end{aligned}$$

$$(11^2 = 121, 121 \cdot 11 = 1331).$$

$$(a+b)((a+b)^2 + 33) = 74.$$

Положим $a+b=t$.

$$t^3 + 33t - 74 = 0;$$

$$t^3 - 4t + 37t - 74 = 0;$$

$$t(t^2 - 4) + 37(t - 2) = 0;$$

$$(t-2)(t(t+2) + 37) = 0;$$

$$(t-2)(t^2 + 2t + 37) = 0;$$

$$\left[\begin{aligned}
t-2 &= 0 \\
(t+1)^2 + 36 &= 0
\end{aligned} \right] \iff t = 2.$$

$$a+b=2,$$

то есть $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{37-30\sqrt{3}} = 2$.

Решение зачетной карточки 8

$$\begin{aligned}
1. & \left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} \right)^4 = \\
& = \left(\frac{(6 + 4\sqrt{2})(\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}})(\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{2})} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(6 - 4\sqrt{2})(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}})(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{2})} \right)^4 = \\
& = \left(\frac{(6 + 4\sqrt{2})(\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{2})}{6 + 4\sqrt{2} - 2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(6 - 4\sqrt{2})(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{2})}{2 - 6 + 4\sqrt{2}} \right)^4 = \\
& = \left(\frac{(6 + 4\sqrt{2})(\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{2})}{4(\sqrt{2} + 1)} + \frac{(6 - 4\sqrt{2})(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{2})}{4(\sqrt{2} - 1)} \right)^4 = \\
& \left[\begin{array}{l} 6 + 4\sqrt{2} = 2(3 + 2\sqrt{2}) = 2(2 + 2\sqrt{2} + 1) = 2(\sqrt{2} + 1)^2; \\ \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2}|\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1); \\ 6 - 4\sqrt{2} = 2(3 - 2\sqrt{2}) = 2(2 - 2\sqrt{2} + 1) = 2(\sqrt{2} - 1)^2; \\ \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2}|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1). \end{array} \right] \\
& = \left(\frac{2(\sqrt{2} + 1)^2(\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2})}{4(\sqrt{2} + 1)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2(\sqrt{2} - 1)^2(\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2})}{4(\sqrt{2} - 1)} \right)^4 = \\
& = \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2})}{2} + \frac{(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2})}{2} \right)^4 = \\
& = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)^4 = (2\sqrt{2})^4 = 2^4 \cdot 2^2 = 64.
\end{aligned}$$

$$2. \left(\frac{a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + (a - 1) \cdot \sqrt{a - 4} + 2}{a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + (a - 1) \cdot \sqrt{a - 4} - 2} \right)^{-2} \cdot \frac{a + \sqrt{a} - 2}{a - \sqrt{a} - 2} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 2 &= a\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2(\sqrt{a} - 1) = \sqrt{a}(a-1) - 2(\sqrt{a} - 1) = \\
 &= \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) - 2(\sqrt{a} - 1) = \\
 &= (\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} - 2) = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1) = \\
 &= (\sqrt{a} - 1)^2(\sqrt{a} + 2); \\
 a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} - 2 &= a\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2(\sqrt{a} + 1) = \\
 &= \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) - 2(\sqrt{a} + 1) = \\
 &= (\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} - 2) = (\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1) = \\
 &= (\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 2); \\
 \sqrt{a} - 4 &= \sqrt{\sqrt{a} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{a} - 2}.
 \end{aligned} \right] \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+2) + (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}+2} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-2}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-2) + (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}+2} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-2}} \right)^{-2} \times \\
 &\quad \times \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)} = \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2} \cdot \left((\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2} + (\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2} \right)}{(\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2} \left((\sqrt{a}+1)\sqrt{\sqrt{a}-2} + (\sqrt{a}-1)\sqrt{\sqrt{a}+2} \right)} \right)^{-2} \times \\
 &\quad \times \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)} = \\
 &= \frac{(\sqrt{a} + 1)^2(\sqrt{a} - 2)}{(\sqrt{a} - 1)^2(\sqrt{a} + 2)} \cdot \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)} = \\
 &= \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = \frac{(\sqrt{a} + 1)^2}{a - 1} = \frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{a - 1}.
 \end{aligned}$$

3. Упростите:

$$\begin{aligned}
 & \frac{8a}{3} - \left(\frac{3a^{-\frac{1}{3}} + 2}{3a^{-\frac{1}{3}} - 2} \right)^2 : \left(\frac{4}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^3} - \frac{1}{8a - 27} \right) = \\
 &= \frac{8a}{3} - \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}(3 + 2a^{\frac{1}{3}})}{a^{-\frac{1}{3}}(3 - 2a^{\frac{1}{3}})} \right)^2 : \frac{4(4a^{\frac{2}{3}} + 6a^{\frac{1}{3}} + 9) - (2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2(2a^{\frac{1}{3}} - 3)(4a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} \cdot 3 + 9)} = \\
 &= \frac{8a}{3} - \left(\frac{3 + 2a^{\frac{1}{3}}}{3 - 2a^{\frac{1}{3}}} \right)^2 : \frac{16a^{\frac{2}{3}} + 24a^{\frac{1}{3}} + 36 - 4a^{\frac{2}{3}} + 12a^{\frac{1}{3}} - 9}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2(8a - 27)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8a}{3} - \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}} + 3}{2a^{\frac{1}{3}} - 3} \right)^2 : \frac{12a^{\frac{2}{3}} + 36a^{\frac{1}{3}} + 27}{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2(8a - 27)} = \\
&= \frac{8a}{3} - \left(\frac{2a^{\frac{1}{3}} + 3}{2a^{\frac{1}{3}} - 3} \right)^2 \cdot \frac{(2a^{\frac{1}{3}} - 3)^2(8a - 27)}{3(2a^{\frac{1}{3}} + 3)^2} = \\
&= \frac{8a}{3} - \frac{8a - 27}{3} = \frac{27}{3} = 9.
\end{aligned}$$

$$4. \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}},$$

$$a = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}}; \quad a^3 = 6 + \sqrt{\frac{847}{27}};$$

$$b = \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}; \quad b^3 = 6 - \sqrt{\frac{847}{27}}.$$

тогда $a^3 + b^3 = 12$.

$$a \cdot b = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} \cdot \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = \sqrt[3]{6^2 - \frac{847}{27}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{972 - 847}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}.$$

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = \\
&= (a + b) \left((a + b)^2 - 3 \cdot \frac{5}{3} \right) = (a + b)^3 - 5(a + b) = 12.
\end{aligned}$$

$$\text{Пусть } a + b = t; \quad t^3 - 5t - 12 = 0$$

$$t^3 - 9t + 4t - 12 = 0$$

$$t(t^2 - 9) + 4(t - 3) = 0$$

$$(t - 3)(t^2 + 3t + 4) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t - 3 = 0 \\ (t + 1,5)^2 + 1,75 = 0 \end{array} \right] \iff t = 3.$$

$$\text{Итак, } a + b = 3, \text{ то есть } \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = 3.$$

Содержание

Программа элективного курса	4
Введение	5
1. Квадратные корни	6
Практикум 1	7
Упражнения	8
Практикум 2	9
Тренировочная работа 1	11
Проверочная работа 1	15
Практикум 3	16
Тренировочная работа 2	21
Практикум 4	26
Тренировочная работа 3	29
Практикум 5	32
Тренировочная работа 4	35
Практикум 6	37
Проверочная работа 2	41
2. Степени с натуральными показателями	42
Практикум 7	42
Проверочная работа 3	44
3. Степени с дробными показателями	45
Практикум 8	46
Упражнения	48
Тренировочная работа 5	50
Проверочная работа 4	55
Практикум 9	57
Тренировочная работа 6	62
Практикум 10	67
Проверочная работа 5	71
4. Решение более сложных примеров	73
Практикум 11	73
Тренировочная работа 7	80
5. Карточки заданий	90
Подготовительные карточки	90
Решение подготовительных карточек	96
Тренировочные карточки	114
Решение тренировочных карточек	118
Зачетные карточки	141
6. Решения	145
Решение проверочной работы 1	145
Решение проверочной работы 2	148
Решение проверочной работы 3	153
Решение проверочной работы 4	155
Решение проверочной работы 5	158
Решение зачетных карточек	162

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 15.08.2011 г. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11,5 печ. л. Тираж 2500 экз. Заказ № 339.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34